

OPTIQUE ONDULATOIRE COLLIMATEE

Thèse

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Neuchâtel
pour l'obtention du grade de docteur ès sciences

par

B.Chabloz

physicien diplômé de l'Université de Neuchâtel

juillet 1983



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555011_0022

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Optique ondulatoire collimatée

de M on sieur Bernard Chabloz

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

MM. les professeurs P. Huguenin, J.P. Amiet,

R. Dändliker et F. Rothen (Lausanne)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 28 octobre 1983

Le doyen:



H. Beck

TABLE DES MATIERES

0. INTRODUCTION	5.
1. ONDE MONOCHROMATIQUE: UNE APPROXIMATION SIMPLE	8.
1.1 Equation de Helmholtz (H)	8.
1.2 Hypothèse sur les solutions de (H); collimation	9.
1.3 Analogie avec la mécanique quantique	11.
1.4 Une propriété de covariance de l'équation "collimatée"	13.
2. UNE APPROXIMATION FONDÉE SUR L'OPTIQUE GEOMETRIQUE	15.
2.1 Limite classique du problème exact et faisceaux collimatés classiques	16.
2.2 Critère de collimation pour l'équation (H)	18.
2.3 Equation de continuité	21.
2.4 Relations de Heisenberg	23.
2.5 Limites de l'analogie avec la mécanique quantique	26.
3. ETATS COHERENTS ET OPTIQUE GEOMETRIQUE	28.
3.1 Etats cohérents	28.
3.2 Interprétation géométrique des paramètres et collimation	30.
3.3 Modes supérieurs	35.
3.4 Optique des faisceaux et matrices de transfert	37.
3.5 Paramètre $q(z)$ et optique géométrique	41.
3.6 Caractérisation d'un pinceau lumineux	44.
3.7 Succession de systèmes optiques linéaires	45.

4. OPTIQUE ONDULATOIRE DES SYSTEMES LINEAIRES	49.
4.1 Matrice $\underline{S}$ d'un système optique linéaire	49.
4.2 Application à un pinceau de lumière	53.
4.3 $\underline{S}$ est une représentation projective de $SL(2, \mathbb{R})$	56.
4.4 Transformations particulières	57.
4.4.1 Transformée de Fourier; foyers	59.
4.4.2 Image	61.
4.5 Fonctions génératrices	65.
5. CONCLUSIONS	71.
APPENDICE: METHODE DE FESHBACH ET VILLARS	73.
A.1 Forme hamiltonienne de l'équation (H)	73.
A.2 Equation de continuité	76.
A.3 Collimation et conjugaison	78.
BIBLIOGRAPHIE	84.
REMERCIEMENTS	87.
CURRICULUM VITAE	88.

O. INTRODUCTION.

La physique abordée dans ce travail est celle d'une onde monochromatique, champ scalaire solution de l'équation des ondes. L'idée est de lui imposer une condition supplémentaire qu'on puisse interpréter ainsi: le champ obtenu décrit un faisceau collimaté, c'est-à-dire que la direction de propagation de l'onde reste voisine d'une direction fixe, par exemple un axe optique, qu'on conviendra de noter axe z.

Une double raison motive l'introduction de cette condition. Tout d'abord, les faisceaux parallèles sont d'un usage fréquent, aussi bien en optique qu'en physique nucléaire (expériences de diffusion). Ensuite, et c'est là ce qui a constitué l'amorce principale de cette recherche, la condition de collimation conduit à une analogie frappante avec la mécanique quantique.

Le cadre suggéré sera plutôt celui de l'optique scalaire, mais la référence d'une telle étude peut s'étendre à la mécanique quantique du point, à l'acoustique, à la mécanique du continu, et de manière générale à tout système physique susceptible d'être décrit à l'aide d'une équation du type Helmholtz.

Le vocabulaire utilisé ne sera pourtant pas exclusivement celui de l'optique, et son aspect quelque peu hybride suggérera peut-être le caractère général du problème posé. Notons par exemple que l'étude des faisceaux collimatés en physique nucléaire deviendra de l'optique paraxiale pour l'opticien, qui par ailleurs verra son collègue physicien regrouper sous le vocable "diffusion" ("scattering") les phénomènes que lui nomme réflexion, réfraction et diffraction.

Le texte comporte deux parties distinctes, la première servant de base théorique, la seconde en proposant plutôt des éléments d'application.

La première partie a donc pour objet la recherche de l'équation de l'optique ondulatoire collimatée (OOC): le chapitre 1 donne en guise d'introduction heuristique, le type de condition à introduire pour qu'on puisse interpréter l'onde comme décrivant un faisceau collimaté. L'équation qui apparaît alors

est formellement celle de Schrödinger où l'une des variables d'espace (précisément la variable z) joue le rôle du temps, et la longueur d'onde λ celui de la constante de Planck h .

Le plan du travail est alors tracé:

- a) proposer un "hamiltonien collimaté".
- b) établir le "critère de collimation" à appliquer aux solutions de l'équation des ondes. C'est l'objet du chapitre central de la thèse, le deuxième, qui prend pour guide la collimation en optique géométrique.

L'équation de l'OOC est alors une équation de Schrödinger associée au hamiltonien collimaté obtenu, et donc l'OOC fournit en principe une illustration de la mécanique ondulatoire, sinon quantique; on peut imaginer "voir", sur un banc optique, l'évolution d'un état quantique en description de Schrödinger.

L'étude de ce parallèle était bien sûr une des motivations principales du travail: pouvait-on par ce biais développer une ébauche d'"intuition quantique"? On verra que malheureusement cette analogie se trouve limitée par l'interprétation des objets apparaissant dans la théorie et par la notion de mesure.

La seconde partie du travail est consacrée aux solutions de l'équation de l'OOC dans le vide (cas dit "libre"), "de part et d'autre" d'un certain système physique (lentille, diffuseur,...) caractérisé par un champ scalaire donné (indice de réfraction, potentiel,...). Un ensemble particulier de solutions de cette équation (états cohérents, ou "paquets minimaux" (KL 66)(CT 73)) permet, au chapitre 3, de donner explicitement un lien avec l'optique géométrique, et c'est de ce lien que traite plus en détail le chapitre 4, dans le cadre de la "diffusion", c'est-à-dire de la relation entre des solutions de l'équation libre dans des régions de l'espace séparées par un "diffuseur" (lentille, trou, potentiel,...).

Dans ce cadre-là, l'approximation de collimation peut être rapprochée de l'approximation eikonale pour la diffusion à haute énergie et aux petits angles (NE 66), (WI 73), (GL 59), assortie de corrections de Fresnel (GO 71).

L'intérêt d'une telle approche n'est pas tant de fournir des résultats nouveaux que de situer les techniques traditionnelles de calcul d'optique des faisceaux dans un cadre précis: entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire, avec conditions de collimation.

Enfin, un appendice de nature plus technique apporte un complément à ce travail. Il propose une autre approche de la collimation du chapitre 2, basée sur une méthode utilisée par Feshbach et Villars (FV 58) pour l'équation de Klein-Gordon. Il s'agit d'une autre écriture du problème exact (équation de Helmholtz) qui recèle déjà très clairement la structure de l'équation de l'OOC, et cette nouvelle formulation paraît alors bien adaptée à l'étude de la collimation. De plus elle contient en germe la collimation dans deux directions opposées, et ouvre ainsi à la possibilité de traiter le problème de la réflexion correspondante.

1. ONDE MONOCHROMATIQUE : UNE APPROXIMATION SIMPLE.

1.1 Equation de Helmholtz.

Considérons l'onde scalaire:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\vec{x}, t) &\longmapsto \Psi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \Phi(\vec{x}), \quad \omega \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.1)$$

où Φ est solution de l'équation de Helmholtz:

$$\left(\Delta + \frac{1}{\lambda^2} (1 - U(\vec{x})) \right) \Phi = 0 \quad (H)$$

U est un champ scalaire réel; $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemples physiques:

a) Mécanique quantique galiléenne.

$$d = 3 \quad ; \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2m\omega}{\hbar} = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad (1.2)$$

$$\text{et} \quad U(\vec{x}) = \lambda^2 \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{x}) = \frac{V(\vec{x})}{\hbar \omega}$$

m est la masse du point, V le potentiel, $\hbar$ la constante de Planck.

b) Optique scalaire dans un milieu isotrope.

$$d = 3 \quad ; \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{et} \quad U(\vec{x}) = 1 - n^2(\vec{x}) \quad (1.3)$$

n est l'indice de réfraction, c la vitesse de la lumière.

c) Acoustique. (MO 48)

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad ; \quad u(\vec{x}) = 1 - \frac{c_0^2}{c_s^2(\vec{x})} \quad (1.4)$$

ω est la fréquence considérée, $c_s(\vec{x})$ est la vitesse du son au point $\vec{x}$, et c_0 une vitesse de référence; par exemple:

$d = 2$: membrane élastique.

$c_s(\vec{x}) = \sqrt{\frac{T}{\sigma(\vec{x})}}$, où T est la tension (supposée uniforme) de la membrane et $\sigma(\vec{x})$ la densité de celle-ci au point $\vec{x}$.

$c_0 = \sqrt{\frac{T}{\sigma_0}}$, où σ_0 est une densité de référence, par exemple une densité moyenne. (Penser à une membrane inhomogène.)

Il faut remarquer que dans l'exemple b), l'équation (H) n'est pas une "réécriture scalaire" (pour une onde monochromatique) de l'équation des ondes vectorielle exacte (pour le champ électrique $\vec{E}$ par exemple) issue des équations de Maxwell dans le cas d'un diélectrique linéaire isotrope de constante $\varepsilon = n^2$; en effet, cette équation des ondes s'écrit:

$$\Delta_v \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \ln \varepsilon) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \vec{E}) = \vec{0} \quad (1.5)$$

Δ_v est mis pour $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge)$, et coïncide avec Δ en coordonnées cartésiennes.

On a, c'est bien connu, un couplage entre les composantes de $\vec{E}$ par le gradient de ε ; l'écriture scalaire n'est donc exacte que si ε est constant. De façon générale (H) est donc, en optique ondulatoire, une approximation, dans le détail de laquelle on n'entrera pas ici.

1.2 Hypothèse sur les solutions de (H); collimation.

Soit dans $\mathbb{R}^d$ une direction fixe: un sous-espace vectoriel d_0 engendré par le vecteur unité $\vec{e}_0$.

Posons $\mathbb{R}^d \ni \vec{x} = \vec{b} + z \vec{e}_0$ où $\vec{b} \in d_0^\perp \simeq \mathbb{R}^{d-1}$ (1.6)

Hypothèse: Φ est une solution de (H) telle que:

$$\left| \begin{array}{l} \Phi(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\lambda} z} \psi(t, z) \\ \text{avec } \left| \frac{1}{\lambda} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \end{array} \right. \quad (1.7)$$

(pour $U = 0$ voir (KL 66))

Si l'on introduit cette hypothèse (1.7) dans (H), on obtient pour ψ l'équation:

$$i \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \Delta_t \psi + \frac{1}{2} U \psi \quad (1.8)$$

C'est une équation de Schrödinger pour des fonctions de $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \ni (t, z)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, où z joue le rôle du temps, et la longueur d'onde λ celui de la constante de Planck h .

On peut comprendre l'approximation (1.7) sur l'exemple simple d'une onde plane solution de (H) libre (i.e. $U = 0$):

$$\vec{x} \mapsto e^{i \vec{K} \cdot \vec{x}} \quad \text{où} \quad \vec{K}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Notons $\vec{K} = K_z \vec{e}_0 + \vec{k}$ où $\vec{k} \cdot \vec{e}_0 = 0$

(1.7) signifie alors:

$$\psi(t, z) = e^{i(K_z - \frac{1}{\lambda})z} e^{i \vec{k} \cdot \vec{t}}$$

$$\frac{1}{\lambda} \gg \left| K_z - \frac{1}{\lambda} \right| \quad \text{c'est-à-dire} \quad K_z \approx \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Donc} \quad k^2 = \frac{1}{\lambda^2} - K_z^2 = \left| \frac{1}{\lambda} - K_z \right| \left| \frac{1}{\lambda} + K_z \right|$$

$$\ll \frac{1}{\lambda} \left| \frac{1}{\lambda} + K_z \right| \approx 2 K_z^2$$

ce qui montre que la direction de propagation $\vec{K}$ de l'onde est très voisine de $\vec{e}_0$: le faisceau est collimaté, et presque aligné sur l'axe z ; (1.7) apparaît donc comme un critère de collimation.

Toutefois cette interprétation de (1.7) n'est valable que dans le cas libre ($U=0$). En effet, le correspondant classique de (1.8) est une équation du mouvement régie par le hamiltonien:

$$h(t, \vec{p}, z) = \frac{\vec{p}^2}{2} - \frac{1}{2} n^2(t, z) \quad (\text{notation (1.3) de l'optique scalaire})$$

alors que le hamiltonien classique "collimaté" se trouve être

$$h^{\text{coll.}}(t, \vec{p}, z) = \frac{\vec{p}^2}{2n(t, z)} - n(t, z) \quad \text{comme on le verra au chapitre 2, dont}$$

l'objet sera précisément une amélioration du critère (1.7), dans le but de trouver une équation de Schrödinger qui soit compatible avec ce hamiltonien $h^{\text{coll.}}$.

1.3 Analogie avec la mécanique quantique.

Si l'on cherche une équation de Schrödinger, c'est avec l'idée qu'il existe une analogie entre la mécanique quantique et l'optique collimatée. Dans le cas libre, l'analogie est claire:

$$\text{notons} \quad \psi(t, z) = \psi_z(t). \quad (1.9)$$

et considérons des faisceaux d'intensité finie, c'est-à-dire:

$$\|\psi_z\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}b \, |\psi_z(t)|^2 < \infty$$

ψ_z appartient donc à $\mathcal{H}_2 \simeq L^2(\mathbb{R}^{d-1})$, l'espace de Hilbert des vecteurs d'état (on dira abusivement "états") au "temps" z .

Considérons, pour le cas libre ($n=1$), un paquet d'ondes solution de (1.8):

$$\psi(t, z) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}k \, g(k) e^{i(k \cdot t - \Omega(k)z)} \quad (1.10)$$

où g a son support centré en k_0 , et $\|g\|_2 < \infty$

$$\psi \text{ solution de (1.8)} \Rightarrow \pm \Omega(k) = \frac{k^2}{2} \quad (1.11)$$

Le centre du paquet décrit une trajectoire $z \longmapsto \vec{b}(z)$ caractérisée par la "vitesse":

$$\frac{d\vec{b}}{dz} = \vec{\nabla}_k \Omega(k_0) \stackrel{(1.11)}{=} \pm \vec{k}_0 \quad (1.12)$$

et visiblement, le hamiltonien $h(\vec{b}, \vec{p}, z) = \frac{1}{2} \vec{p}^2$ est tel que sur cette trajectoire:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d\vec{b}}{dz} = \vec{p} = \overrightarrow{\text{const.}} = \vec{p}_0 \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \frac{d\vec{p}}{dz} = \vec{0} \\ \\ h(\vec{b}, \vec{p}, z) = \text{const} = E_0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

On a donc les "relations de de Broglie":

$$\left| \begin{array}{l} \vec{p}_0 = \pm \vec{k}_0 \\ \\ E_0 = \pm \Omega(k_0) \end{array} \right. \quad (1.14)$$

qui relie les paramètres géométriques ("classiques") à ceux de l'onde (1.10) ("quantiques").

L'analogie avec la mécanique quantique de Schrödinger est frappante:

$$i\pm \frac{\partial \psi}{\partial z}(\vec{b}, z) = (H(z) \psi_z)(\vec{b}) \quad , \quad \text{où} \quad H(z) = \frac{1}{2} \vec{P}^2 + \frac{\pm^2}{2} U(\vec{B}, z) \quad (1.15)$$

$\vec{B}$ et $\vec{P}$ étant les opérateurs usuels de multiplication par l'argument et de dérivation:

$$\left| \begin{array}{l} (\vec{B} f)(\vec{b}) = \vec{b} f(\vec{b}) \\ \\ (\vec{P} f)(\vec{b}) = \frac{\pm}{i} \vec{\nabla}_{\vec{b}} f(\vec{b}) \end{array} \right. \quad [B_k, P_\ell] = i\pm \delta_{k\ell} \quad (1.16)$$

Dans le cadre de cette analogie, le sens de l'approximation (1.7) est, pour l'onde plane $\psi(\vec{b}, z) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{b} - \Omega(k)z)}$, $U = 0$:

$$\left| \frac{\Omega}{\pm} \right| \ll |\Omega^2| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |E| \ll 1 \quad (1.17)$$

Ω^2 est l'excédant que fournit la relation approximative (1.11) au carré du nombre d'onde total exact de l'onde plane solution de (H) libre:

$$\textcircled{D} \quad e^{i(\vec{k} + (\frac{1}{x} - \Omega)\vec{e}_0) \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad ; \quad \vec{k} \cdot \vec{e}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{nb. d'onde total)}^2 &= \vec{K}^2 = \vec{k}^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \frac{\Omega}{x} + \Omega^2 \\ &\stackrel{(1.11)}{\approx} \frac{1}{x^2} + \Omega^2 = \frac{1}{x^2} (1 + E^2) \end{aligned}$$

le carré exact étant $\vec{K}^2 = \frac{1}{x^2}$

1.11; assure donc l'exactitude de la phase au premier ordre en E , paramètre qui mesure en quelque sorte l'erreur commise par rapport à (H).

1.4 Une propriété de covariance de l'équation (1.15).

On peut prêter à l'analogie exposée une vertu illustrative: elle pourrait permettre de "voir" la mécanique de Schrödinger sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ dans le comportement de faisceaux collimatés de lumière monochromatique (la fréquence jouant rappelons-le, le rôle de $\frac{1}{h}$). Toutefois, cette analogie présente un grave défaut: comme on l'a souligné au paragraphe 1.2, l'équation qui décrit un faisceau collimaté en optique géométrique ne correspond à (1.8) que dans le cas libre, où $n = 1$.

Notons qu'en particulier (1.8) est une équation covariante de Galilée^(JA 68) (rappelons qu'on peut interpréter z comme le temps: il ne s'agit pas ici de regarder des faisceaux collimatés dans un référentiel réellement en mouvement!) au sens suivant:

La transformation de Galilée s'écrit (penser à z comme au temps):

$$\begin{pmatrix} z \\ \vec{b} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z' \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \vec{b} + z\vec{v} + \vec{b}_0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

où $\vec{b}_0$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs constants de $\mathbb{R}^{d-1}$.

Pour le champ U :

$$U'(t', z') = U(t' - z' \vec{v} - t_0, z') \quad (1.19)$$

Dans l'espace des états, la covariance signifie qu'il existe un opérateur unitaire: (voir (JA 68))

$$\begin{aligned} G_{\vec{v}, t_0} : \mathcal{H}_z &\longrightarrow \mathcal{H}_{z'} \\ \psi_z &\longmapsto \psi_{z'} \end{aligned} \quad \text{tel que}$$

$$\begin{cases} G_{\vec{v}, t_0}^{-1} \vec{B} G_{\vec{v}, t_0} = \vec{B} + z \vec{v} + t_0 \\ G_{\vec{v}, t_0}^{-1} \dot{\vec{B}} G_{\vec{v}, t_0} = \dot{\vec{B}} + \vec{v} \quad \text{où} \quad \dot{\vec{B}} = i[H, \vec{B}] \end{cases} \quad (1.20)$$

et qui ne modifie pas la forme de l'équation (1.8), c'est-à-dire que:

$$i \hbar \frac{\partial \psi_{z'}}{\partial z'} = \left(-\frac{\hbar^2}{2} \Delta_{t'} + U' \right) \psi_{z'} \quad (1.8)'$$

On montre facilement que la transformation donnée par:

$$\psi_{z'}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{v} \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{v} \cdot (\vec{v} z + t_0))} \psi_z(t - \vec{v} z - t_0) \quad (1.21)$$

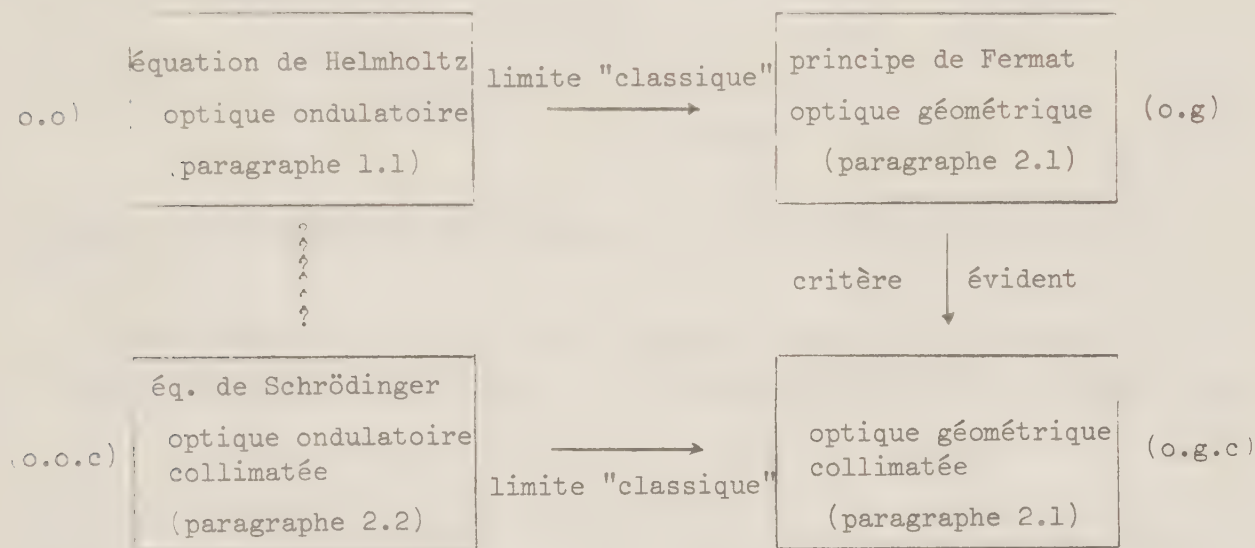
donne explicitement la covariance, l'opérateur s'écrivant:

$$G_{\vec{v}, t_0} = e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{v} \cdot \vec{B} - (z \vec{v} + t_0) \cdot \vec{P})} = e^{\frac{i}{2\hbar} \vec{v} (z \vec{v} + t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} (z \vec{v} + t_0) \cdot \vec{P}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{v} \cdot \vec{B}} \quad (1.22)$$

On reconnaît bien sûr la représentation projective du groupe de Galilée pour la "masse" 1 (JA 68).

2. UNE APPROXIMATION FONDÉE SUR L'OPTIQUE GEOMETRIQUE.

Le but de ce chapitre est d'induire un critère de collimation dans le cas ondulatoire de l'équation de Helmholtz, sur la base d'un critère évident en optique géométrique et du passage à la limite "classique" géométrique):



En d'autres termes, il s'agit de trouver un passage de (o.o) à (o.o.c) qui rende ce diagramme commutatif. Il se trouve, comme on va le voir, qu'il convient de généraliser (1.7) en remplaçant $e^{\frac{i}{\lambda}z}$ par la phase eikonale (NE 66)(GL 59) $e^{\frac{i}{\lambda} \int^t n(\xi, t) dt}$, les deux factorisations étant bien sûr identiques pour le cas libre $n = 1$.

De plus il apparaîtra nécessaire, pour obtenir l'équation de Schrödinger désirée, d'introduire le facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est précisément la première approximation d'amplitude de la méthode WKB (voir par exemple (CR 80), (BM 72)).

2.1 Limite "classique" du problème exact et faisceaux collimatés "classiques".

Considérons une solution $\bar{\phi}$ de (H), dans les notations (1.3) de l'optique, et posons:

$$\bar{\phi}(\vec{x}) = g(\vec{x}) e^{\frac{i}{\lambda} S(\vec{x})} \quad (2.1)$$

où S et g sont des fonctions réelles.

$$\Delta_{\vec{x}} \bar{\phi} = \left\{ \left(\frac{i}{\lambda} \Delta_{\vec{x}} S + \left(\frac{i}{\lambda} \vec{\nabla}_{\vec{x}} S \right)^2 \right) g + \frac{2i}{\lambda} \vec{\nabla}_{\vec{x}} g \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} S + \Delta_{\vec{x}} g \right\} e^{\frac{i}{\lambda} S}$$

et (H) devient donc, après multiplication par $\lambda^2 e^{-\frac{i}{\lambda} S}$:

$$\left(\lambda^2 \Delta_{\vec{x}} S - (\vec{\nabla}_{\vec{x}} S)^2 + n^2 \right) g + 2i\lambda \vec{\nabla}_{\vec{x}} g \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} S + \lambda^2 \Delta_{\vec{x}} g = 0 \quad (2.2)$$

On obtient la limite "semi-classique" en faisant $\lambda \rightarrow 0$, pour obtenir l'équation eikonale bien connue^(MF 81), pour la partie réelle de (2.2):

$$(\vec{\nabla}_{\vec{x}} S)^2 = n^2 \quad (g \neq 0) \quad (2.3)$$

la partie imaginaire donnant une équation pour l'amplitude g :

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (g^2 \vec{\nabla}_{\vec{x}} S) = 0 \quad (g \neq 0) \quad (2.4)$$

Soulignons que cette limite "semi-classique" cesse d'être bonne au voisinage des caustiques, qui sont les surfaces de branchement de la "fonction" en général multiforme S , solution de l'équation classique (2.3), et où l'amplitude g diverge (voir p. ex. (CR 80)).

On peut écrire (2.3) sous la forme:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2 - (\vec{\nabla}_{\vec{t}} S)^2$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial S}{\partial z} \mp \sqrt{n^2 - (\vec{\nabla}_{\vec{t}} S)^2} = 0 \quad (2.5\mp)$$

Ce sont deux équations de Hamilton-Jacobi sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, z jouant le rôle du temps, et associées aux hamiltoniens:

$$h_{\mp}(\vec{t}, \vec{p}, z) = \mp \sqrt{n^2(\vec{t}, z) - \vec{p}^2} \quad (2.6\mp)$$

Visiblement, si S est solution de (2.5+), $-S$ est solution de (2.5-); on ne considérera donc qu'un des signes, en choisissant h_- . Ce hamiltonien correspond bien au principe de Fermat, selon lequel le chemin optique $\int_{\Gamma} n(\vec{x}) dS(\vec{x})$ est une grandeur extrémale sur la trajectoire Γ , graphe de $z \mapsto \vec{b}(z)$. En effet:

$$0 = \delta \int_{\Gamma} n(\vec{x}) dS(\vec{x}) = \delta \int_{\Gamma} n(t, z) \sqrt{1 + \dot{b}^2(z)} dz = \delta \int_{\Gamma} l(t, \dot{b}, z) dz$$

où $l(t, \dot{b}, z) = n(t, z) \sqrt{1 + \dot{b}^2} \quad \left(\dot{b} \equiv \frac{db}{dz} \right) \quad (2.7)$

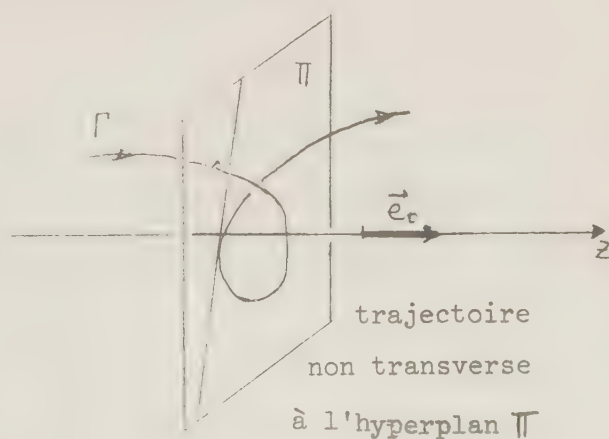
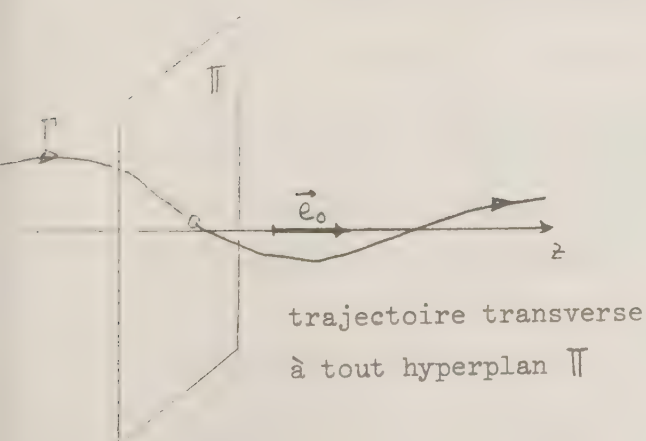
et le lagrangien l est bien une transformée de Legendre de h_- :

$$\frac{\partial h_-}{\partial \dot{b}} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{n^2 - \vec{p}^2}} \Rightarrow \vec{p} = \frac{n \dot{b}}{\sqrt{1 + \dot{b}^2}} \quad (2.8)$$

d'où $\vec{b}(t, \dot{b}, z) \cdot \dot{b} - h_-(t, \vec{p}(t, \dot{b}, z), z) = n(t, z) \frac{\dot{b}^2}{\sqrt{1 + \dot{b}^2}} + \sqrt{n^2(t, z) \left(1 - \frac{\dot{b}^2}{1 + \dot{b}^2}\right)}$

$$= l(t, \dot{b}, z)$$

Remarquons cependant que le passage de (2.6) à (2.7) nécessite que la trajectoire (le rayon lumineux) Γ soit le graphe d'une fonction $z \mapsto \vec{b}(z)$; c'est la restriction sur le type de trajectoires qu'apportent l'écriture (2.5) de l'équation eikonale et le choix d'un signe, ce dernier étant le choix d'un sens pour les rayons lumineux, et l'interdiction de tout point de rebroussement où $\dot{b}$ ne serait plus défini. En d'autres termes, le choix d'un signe impose que les trajectoires soient transverses^(PS 78) à tout hyperplan Π orthogonal à l'axe z . Ce sera évidemment le cas pour les faisceaux collimatés.



Ce qui caractérise une trajectoire collimatée, le fait que sa direction reste voisine de $\vec{e}_0$, c'est évidemment que sa "vitesse" soit très petite. Le critère saute aux yeux:

$$z \mapsto \vec{b}(z) \text{ collimatée} \iff \dot{\vec{b}}^2(z) \ll 1, \forall z \quad (2.9)$$

Par la relation (2.8), cela revient à imposer:

$$\vec{p}^2 \ll n^2 \quad (2.10)$$

Les fonctions de Lagrange et de Hamilton s'écrivent alors respectivement:

$$L^{\text{coll}}(\vec{b}, \dot{\vec{b}}, z) = n(\vec{b}, z) \frac{\dot{\vec{b}}^2}{2} + n(\vec{b}, z) \quad (2.11)$$

$$H^{\text{coll}}(\vec{b}, \vec{p}, z) = \frac{\vec{p}^2}{2n(\vec{b}, z)} - n(\vec{b}, z) \quad (2.12)$$

Cette fonction de Hamilton est manifestement différente de la forme (1.15)!

L'équation de Lagrange:

$$\begin{aligned} (n\dot{\vec{b}})' &= \left(\frac{1}{2}\dot{\vec{b}}^2 + 1\right) \vec{\nabla} n \stackrel{(2.9)}{\cong} \vec{\nabla} n \\ \Rightarrow \ddot{\vec{b}} &\cong \vec{\nabla} \log n - (\log n)' \dot{\vec{b}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

n'est visiblement pas covariante galiléenne tant que l'indice de réfraction n dépend de z .

2.2 Critère de collimation pour l'équation de Helmholtz.

L'approximation simple (1.7) ne permet donc pas d'obtenir une équation de Schrödinger avec un hamiltonien correspondant à (2.12). Introduisons alors une factorisation plus générale que (1.7):

$$\Phi(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar} f(\vec{b}, z)} \psi(\vec{b}, z) \quad (2.14)$$

la fonction f étant telle que $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne s'annule jamais.

On a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial z} \Phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} e^{\frac{i}{\lambda} f} \quad (2.15)$$

On peut alors exprimer $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ en fonction de $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, et écrire l'équation de Helmholtz (H) : $(\Delta_x + \frac{n^2}{\lambda^2}) \Phi = 0$ de la manière suivante (puisque $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$) :

$$i \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \Delta_x \Phi + \left(\frac{i}{\lambda} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{i}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \frac{n^2}{\lambda^2} \right) \Phi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{\frac{i}{\lambda} f} \right\} = 0$$

$$\text{Posons alors } f(t, z) = \int_0^z n(t, t) dt \quad (2.16)$$

et définissons : $\bar{\Phi}$ est une onde collimatée sur l'intervalle $[a, b]$ ssi

$$\text{pour } z \in [a, b] : \lambda \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll 2n \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \text{ ou } \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (2.17)$$

Cela signifie que sur une distance de l'ordre de λ , ψ peut, en excellente approximation, être considérée comme linéaire (affine) en z .

Compte tenu de (2.15), (2.16) et (2.17), (H) devient :

$$i \lambda \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = - \frac{\lambda^2}{2n} \Delta \bar{\Phi} - \left(n + \frac{i \lambda}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \bar{\Phi} \quad (2.18)$$

on a noté $\Delta_{\bar{r}} = \Delta$.

Dorénavant, on notera $\bar{\nabla}$ pour $\bar{\nabla}_{\bar{r}}$, et de même pour tout opérateur fabriqué avec $\bar{\nabla}_{\bar{r}}$.

Précisons bien que la factorisation (2.14) ne vise pas à passer à une équation pour le champ ψ , mais seulement à établir le critère (2.17). (2.18) est une équation pour $\bar{\Phi}$, le champ original de l'équation (H).

(2.18) se rapproche d'une équation de Schrödinger avec un hamiltonien correspondant à (2.12); seul un terme $\frac{i \lambda}{2n} \frac{\partial n}{\partial z}$ vient s'ajouter à n . Pourtant, si l'on veut conserver l'analogie avec la mécanique quantique, exposée au chapitre 1, on doit obtenir un opérateur hamiltonien autoadjoint; or l'opérateur $\frac{1}{n} \Delta$ n'est pas symétrique. Cependant, parmi les symétrisations envisageables $\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \Delta + \Delta \frac{1}{n} \right), \bar{\nabla} \cdot \frac{1}{n} \bar{\nabla}, \dots \right)$, il en existe une (et une seule, semble-t-il) qui permette d'absorber le terme supplémentaire :

$$\text{introduisons la fonction } \chi = \sqrt{n} \bar{\Phi} \quad (2.19)$$

Ainsi, $\dot{\Phi} = \frac{\chi}{\sqrt{n}}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \chi \right)$

On peut donc écrire (2.18) sous la forme:

$$i \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \chi \right) = - \frac{\pm^2}{2n} \Delta \frac{\chi}{\sqrt{n}} - \left(n + \frac{i \pm}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \frac{\chi}{\sqrt{n}}$$

Les termes en $\frac{\partial n}{\partial z}$ disparaissent, et il reste, après multiplication par $\sqrt{n}$:

$$i \pm \frac{\partial \chi}{\partial z} = - \frac{\pm^2}{2} \frac{1}{n} \Delta \frac{\chi}{\sqrt{n}} - n \chi \quad (2.20)$$

C'est bien une équation de Schrödinger:

$$i \pm \frac{\partial \chi}{\partial z}(\bar{t}, z) = (H \chi_z)(\bar{t}) \quad (2.21)$$

$$\text{où } H = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n(\bar{t}, z)}} \vec{P}^2 \frac{1}{\sqrt{n(\bar{t}, z)}} - n(\bar{t}, z) = H^\dagger$$

En résumé:

$$\Phi \text{ est une onde collimatée} \iff \begin{cases} \Phi(\bar{t}, z) = e^{\frac{i \pm}{2} \int_0^z n(\bar{t}, t) dt} \psi(\bar{t}, z) & (a) \\ \pm \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll 2n \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \text{ ou } \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 & (b) \end{cases} \quad (2.22)$$

et le champ $\chi = \sqrt{n} \Phi$ obéit à l'équation de Schrödinger (2.20).

Comme annoncé, la factorisation (2.22a) fait apparaître la phase eikonale (NE 66)(GL 59):

$$\int_0^z n(\bar{t}, t) dt$$

(intégrale du "potentiel" sur une parallèle à l'axe de collimation)

Plus précisément, dans le cas de la mécanique, (1.2) et (1.3) donnent:

$$n(\vec{x}) = \sqrt{1 - \frac{V(\vec{x})}{E}} \quad (2.23)$$

et c'est pour $E \gg V$ que (2.16) apparaît effectivement comme la phase eikonale:

$$\int_0^z n(\bar{t}, t) dt \underset{E \gg V}{\approx} \int_0^z \left(1 - \frac{V(\bar{t}, t)}{2E} \right) dt = z - \frac{1}{2E} \int_0^z V(\bar{t}, t) dt \quad (2.24)$$

Cette factorisation (2.22a) est analogue à celle qui résulte de l'approximation parabolique de Fock-Leontovich^(KS 80), mais cette dernière, basée sur une hypothèse sur n , est moins générale, et donne une équation du type (1.8) plutôt que (2.20).

On trouvera une autre approche de la collimation dans l'appendice A. Il s'agit d'une méthode calquée sur celle qu'ont utilisée Feshbach et Villars^(FV 58) pour l'équation de Klein-Gordon, et qui permet d'écrire l'équation (exacte) de Helmholtz comme deux équations couplées dont la forme ressemble beaucoup à (2.20). Cette approche permet de considérer à la fois les deux sens possibles de la collimation ("de gauche à droite" et "de droite à gauche"), liés aux deux signes possibles du hamiltonien (2.6).

Revenons à l'analogie avec la mécanique quantique: elle suggère d'interpréter les grandeurs ou relations qu'on y rencontre, dans le cadre de l'optique collimatée. Examinons en particulier l'équation de continuité et les relations de Heisenberg.

2.3 Equation de continuité.

La densité $\rho_{\chi}(t,z) = |\chi(t,z)|^2$ (2.25)

donne l'intensité lumineuse I dans un diélectrique linéaire isotrope caractérisé par $\varepsilon = n^2$, si l'on se souvient que $\vec{\Phi} = \frac{\chi}{\sqrt{n}}$ représente une composante du champ électrique $\vec{E}$ (dit "champ optique"^(HZ 76)) et que

$$I = \varepsilon \langle \vec{E}^2 \rangle \frac{c}{n} \quad (\text{voir p. ex. (HZ 76) p. 46})$$

(densité d'énergie électrique $\times$ vitesse de la lumière dans le diélectrique)

L'opérateur vitesse:

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{P} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2.26)$$

permet de définir une densité de courant^{(CT 73)(AH 79)} (champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{d-1}$, pour z fixé):

$$\begin{aligned} \vec{j}_\chi &= \frac{1}{2} \left(\chi^* \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{P} \frac{1}{\sqrt{n}} \chi + \chi \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \vec{P} \frac{1}{\sqrt{n}} \chi \right)^* \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\chi^* \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nabla} \frac{\chi}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \chi \vec{\nabla} \frac{\chi^*}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Les termes où n est dérivé disparaissent, et on retrouve la forme usuelle:

$$\vec{j}_\chi = \frac{\hbar}{n} \operatorname{Im} \left(\chi^* \vec{\nabla} \chi \right) \quad (2.27)$$

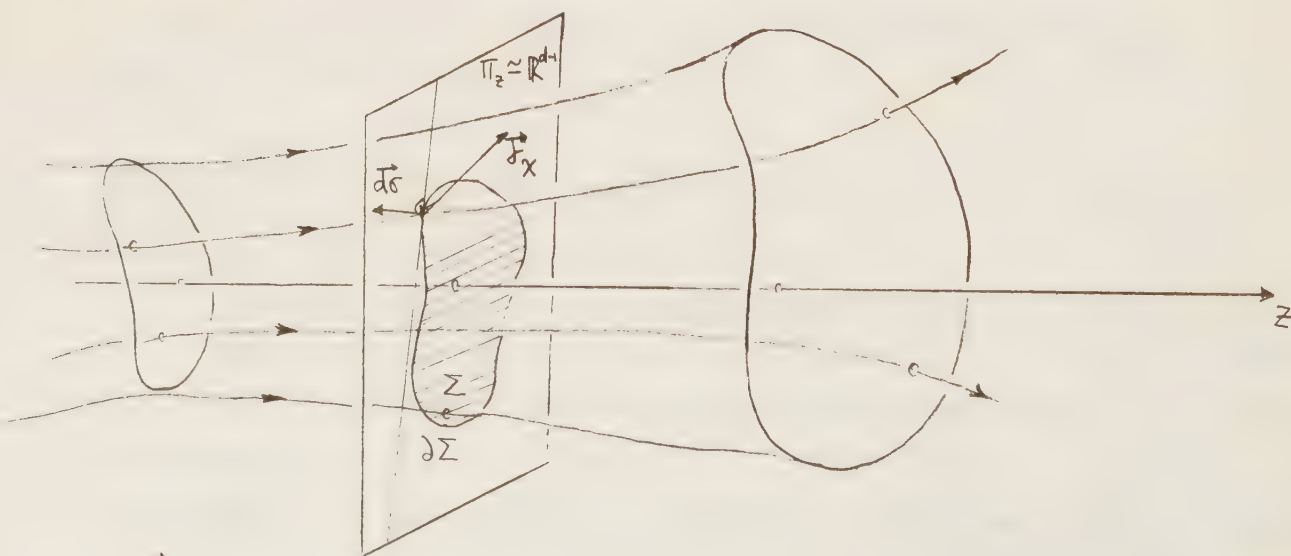
De ces définitions et de l'équation de Schrödinger (2.20) découle l'équation de continuité:

$$\operatorname{div} \vec{j}_\chi + \frac{\partial g_\chi}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

Sa forme intégrale

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{j}_\chi \cdot d\vec{\sigma} = - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Sigma} g_\chi d^{d-1}b \quad (2.29)$$

donne l'interprétation de $\vec{j}_\chi$, à partir de la variation d'intensité lumineuse en fonction de z :



$\vec{j}_\chi$ indique la variation en fonction de z , de la répartition de la lumière dans $\pi_z \simeq \mathbb{R}^{d-1}$

Exemple dans le cas libre ($n = 1$):

$$\chi(t, z) = e^{\frac{i}{2z} \alpha(z) t^2}, \quad \alpha(z) \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } \alpha(z) > 0 \quad (2.30)$$

$$\text{densité: } g_\chi(t, z) = e^{-\frac{1}{z} \text{Im } \alpha(z) t^2} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \text{densité de courant: } \vec{\sigma}_\chi(t, z) &= \frac{1}{z} \text{Im} \left(e^{-\frac{i}{2z} \alpha(z) t^2} \frac{i}{z} \alpha(z) t e^{\frac{i}{2z} \alpha(z) t^2} \right) \\ &= \text{Im} \left(i \alpha(z) t e^{-\frac{1}{z} \text{Im } \alpha(z) t^2} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_\chi(t, z) = \text{Re } \alpha(z) t e^{-\frac{1}{z} \text{Im } \alpha(z) t^2} = \text{Re } \alpha(z) t g_\chi(t, z) \quad (2.32)$$

On constate que $\text{Im } \alpha(z)$ mesure la largeur du faisceau, tandis que $\text{Re } \alpha(z)$ indique la façon dont il diverge ($\text{Re } \alpha(z) > 0$) ou converge ($\text{Re } \alpha(z) < 0$).

2.4 Relations de Heisenberg.

Les relations de Heisenberg, dans le cadre de l'optique collimatée, se traduisent par une limitation du pouvoir de résolution: l'impossibilité de construire un faisceau arbitrairement bien collimaté en même temps qu'arbitrairement bien focalisé.

Plaçons-nous dans le cadre habituel de la mécanique de Schrödinger: pour z fixé, la fonction χ_z (notation (1.9)) appartient à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$. χ_z sera un état collimaté si de plus:

- la fonction $\phi_z = \frac{\chi_z}{\sqrt{n_z}}$ satisfait (2.22)
- $i \frac{1}{z} \frac{\partial \chi_z}{\partial z} = H(z) \chi_z$, $H(z)$ donné en (2.21)

$\chi_z \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ assure que la quantité de lumière N_z traversant le plan Π_z est finie:

$$N_z^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}b \, g(t, z) \stackrel{(2.25)}{=} (\chi_z, \chi_z) < \infty \quad (2.33)$$

De plus, $H(z) = H^\dagger(z) \quad \forall z$ implique que $\frac{\partial}{\partial z} N_z = 0$.

Une onde collimatée est une succession unitaire d'états collimatés:

$$N_z = N = \text{const.}$$

Dans ce cadre-là, pour tout couple (σ_1, σ_2) d'opérateurs conjugués (i.e. $[\sigma_1, \sigma_2] = i\mathbb{1}$), on a, pour tout état χ_z , les "relations de Heisenberg":

$$\Delta_{\chi_z} \sigma_1 \Delta_{\chi_z} \sigma_2 \geq \frac{1}{2} \quad (2.34)$$

$$\text{où} \quad \Delta_{\chi_z} \sigma \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{(\chi_z, \sigma^2 \chi_z) - (\chi_z, \sigma \chi_z)^2}{(\chi_z, \chi_z)}} \quad (2.35)$$

(voir p. ex. (CT 73))

En particulier:

$$\Delta_{\chi_z} B_k \Delta_{\chi_z} P_\ell \geq \frac{1}{2} \delta_{k\ell} \quad (2.36)$$

Dans le cas libre, le fait que χ_z soit un état collimaté n'est pas sans conséquence pour $\Delta_{\chi_z} P_\ell$, comme on s'y attend. En effet, prenons une évolution $z \mapsto \chi_z$ d'états collimatés normés $(\chi_z, \chi_z) = 1$ solution de (2.21) pour $n = 1$ ($\Rightarrow \chi_z = \phi_z$), et satisfaisant le critère (2.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} &\stackrel{(2.22a)}{=} \left(-\frac{i}{2} \bar{P}_z + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) e^{-\frac{i}{2} z} \stackrel{(2.21)}{=} -\frac{i}{2} \phi_z + \frac{1}{2iz} \bar{P}^2 \phi_z - \frac{1}{iz} \phi_z \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi_z}{\partial z} &= \frac{1}{2iz} e^{-\frac{i}{2} z} \bar{P}^2 \phi_z \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dérivons (2.37) par rapport à z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} &= e^{-\frac{i}{2} z} \left(-\frac{1}{2iz^2} \bar{P}^2 \phi_z + \frac{1}{2iz} \bar{P}^2 \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) \\ &\stackrel{(2.19)}{=} e^{-\frac{i}{2} z} \left(-\frac{1}{2iz^2} \bar{P}^2 \phi_z - \frac{1}{2iz^2} \bar{P}^2 \left(\frac{1}{2} \bar{P}^2 \phi_z - \phi_z \right) \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} &= -\frac{1}{4iz^2} e^{-\frac{i}{2} z} (\bar{P}^2)^2 \phi_z \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le produit scalaire avec ψ_z donne alors:

$$\left(\psi_z, \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} \right) = - \frac{1}{4\lambda^2} \langle (\vec{P}^2)^2 \rangle_{\phi_z} \quad (2.39)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz et le critère (2.22) permettent d'écrire:

$$\frac{1}{4\lambda^2} \langle (\vec{P}^2)^2 \rangle_{\phi_z} \leq \underbrace{\|\psi_z\|^2}_{=1} \left\| \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} \right\| << \frac{1}{\lambda} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|$$

mais, par (2.37): $\left\| \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right\| = \frac{1}{2\lambda} \|\vec{P}^2 \phi_z\| \stackrel{\vec{P}^{2\dagger} = \vec{P}^2}{=} \sqrt{\langle (\vec{P}^2)^2 \rangle_{\phi_z}}$

On a donc obtenu:

$$\frac{1}{4\lambda^2} \langle (\vec{P}^2)^2 \rangle_{\phi_z} << \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{\langle (\vec{P}^2)^2 \rangle_{\phi_z}}, \text{ c'est-à-dire:}$$

$$\sqrt{\langle (\vec{P}^2)^2 \rangle_{\phi_z}} << 1 \quad (2.40)$$

Mais pour tout opérateur $\mathcal{O}$ essentiellement autoadjoint, et ϕ_z dans les domaines de définition de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^2$, on a:

$$(\Delta_{\phi_z} \mathcal{O})^2 = \langle \mathcal{O}^2 \rangle_{\phi_z} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\phi_z}^2 \geq 0 \quad (2.41)$$

donc $\langle \mathcal{O} \rangle_{\phi_z} \leq \sqrt{\langle \mathcal{O}^2 \rangle_{\phi_z}}$, et (2.40) implique alors:

$$\langle \vec{P}^2 \rangle_{\phi_z} << 1 \quad (2.42)$$

Il ne reste qu'à invoquer encore une fois (2.41) pour conclure:

$$(\Delta_{\phi_z} p_\ell)^2 << 1 \quad (2.43)$$

Comme on s'y attendait, dans le cas libre, $\vec{p}$ est très bien défini pour un état collimaté. Ceci restreint bien entendu les possibilités de focalisation d'un faisceau collimaté: (2.36) donne, dans le cas $n = 1$ et compte tenu de (2.43):

$$\Delta_{\phi_z} B_k \gg \lambda \quad (2.44)$$

Voilà qui limite a priori le pouvoir de résolution qu'on peut obtenir avec un faisceau collimaté. Dans le cas où n n'est pas constant, de telles estimations nécessitent une hypothèse supplémentaire sur n , qu'on n'établira pas ici.

2.5 Limites de l'analogie avec la mécanique quantique.

Les outils mathématiques qui nous servent à décrire les faisceaux collimatés sont ceux de la mécanique quantique d'une particule sans spin: espace de Hilbert, opérateurs (essentiellement) autoadjoints, équation d'évolution de Schrödinger. On pourrait dire l'analogie mathématique totale, mais l'analogie physique est clairement limitée par l'interprétation des grandeurs et des relations. Cette limitation peut sans doute se résumer à la différence fondamentale des interprétations de la densité (carré du module de la fonction d'onde). Dans le cas des faisceaux collimatés, c'est l'intensité (2.25), et l'interprétation ne pose aucun problème conceptuel: cette grandeur est parfaitement mesurable pour un faisceau donné. En mécanique quantique, on l'interprète comme une densité de probabilité de présence de la particule considérée; par définition, cette grandeur n'est testable sur une seule particule que très partiellement: un appareil de mesure n'est capable que d'indiquer si, oui ou non, la particule se trouve, à un instant fixé, dans une région donnée de l'espace.

La question de la mesure établit donc une différence décisive entre la mécanique quantique et l'optique collimatée; pas question pour cette dernière de parler d'expériences oui-non et de réduction du paquet d'ondes, même si on peut très bien imaginer des filtres en position (diaphragme) et en "impulsion" (lentille-diaphragme-lentille). Les postulats de la mécanique quantique^(CT 73) (en particulier celui de la réduction du paquet d'ondes) n'ont aucun sens en optique collimatée; celle-ci n'est pas une théorie qu'on peut induire sur la base de l'existence et de la nécessité d'expériences oui-non qui permettent de déterminer un état^{(JA 68), (PI 76)}.

Il ne fait donc guère de sens d'associer un concept de particule à une onde collimatée, qu'on devrait plutôt rapprocher d'un faisceau cohérent d'un grand nombre de particules.

Si toutefois l'on insiste à vouloir associer un concept de particule aux états normés, la "particule" à considérer doit être un objet qui porte une unité élémentaire ou un "quantum" de puissance, comme le photon porte un quantum d'énergie. On peut alors penser à 1 photon par unité de temps (ou N photons par unité de temps, dans le langage de la seconde quantification (voir p. ex. (MR 78)), mais cette construction dépend évidemment du choix de l'unité de temps. Ce problème est général: il n'existe pas de mesure instantanée de l'intensité d'un faisceau; en réalité, on mesure une énergie (par exemple le noircissement d'une plaque photosensible) pendant un temps donné, pour obtenir une puissance moyenne. Dans le cas qui nous occupe, cette unité de temps est sous-entendue puisque dès le début il n'est question que du cas stationnaire!

L'optique collimatée permet d'"illustrer" en quelque sorte un aspect de la mécanique quantique: celui de l'évolution d'un état en description de Schrödinger. Toutefois le hamiltonien (2.21) n'est pas celui d'un point matériel dans un potentiel local: on peut écrire (2.21) sous une forme qui fait intervenir un potentiel du type Kisslinger (voir p. ex. (WI 73), (AH 79)):

$$i\hbar \frac{\partial \chi_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \frac{1}{n_z} \vec{p} - \left(n_z + \hbar^2 \frac{1}{m_z} \left(\Delta \frac{1}{n_z} \right) \right) \chi_z \quad (2.45)$$

3. ETATS COHERENTS ET OPTIQUE GEOMETRIQUE.

Par le biais d'un ensemble particulier de solutions de l'équation "de Schrödinger" (2.20) dans le cas libre (états cohérents ou paquets minimaux), on retrouve l'optique géométrique des faisceaux (formule des lentilles, etc...).

En outre, ces états cohérents sont généralement utilisés pour décrire les faisceaux LASER (KL 66), (KS 80). Ce sont des solutions de (2.20) qui rendent minimal le produit $\Delta B \cdot \Delta P$ apparaissant dans les "relations de Heisenberg" (2.36) (voir p. ex. (CT 73)).

A ce propos, dissipons tout risque de confusion: le terme "état cohérent" s'applique ici à un champ classique et ne fait nullement allusion aux états cohérents qui donnent la description quantique (MR 78) d'un faisceau LASER (considéré comme ensemble de photons cohérents). Notons cependant qu'il n'est pas abusif de désigner ces deux objets par le même terme dans le sens où les deux rendent minimale l'incertitude de Heisenberg (l'un dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^4)$ (paragraphe 2.4), l'autre dans l'espace de Fock où on décrit les assemblées de photons (MR 78)): c'est précisément une propriété essentielle des états cohérents.

3.1 Etats cohérents (KL 66).

Choisissons la factorisation (+) dans le cas libre $n = 1$. (voir Appendice) (rappelons que dans ce cas $\chi = \phi$ (2.19)) :

$$\phi^{(+)}(t, z) = e^{+\frac{i}{\lambda} z} \psi(t, z)$$

Si $\phi^{(+)}$ est solution de (2.20), alors ψ vérifie l'équation (1.8) où $U = 0$:

$$i\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\lambda^2}{2} \Delta_t \psi$$

Introduisons dans cette équation une solution de la forme:

$$\psi(b, z) = e^{-\frac{i}{2} \left(A(z) - \frac{b^2}{2q(z)} \right)}$$

On trouve:

$$\begin{cases} q'(z) = 1 \\ i A'(z) = \frac{d-1}{q(z)} \end{cases} \quad (3.1)$$

Ecrivons alors ces paramètres sous la forme:

$$q(z) = z - z_0 - i q_0 \quad (3.2)$$

$$i A(z) = (d-1) \ln \alpha \frac{q_0}{i q(z)} \quad (3.3)$$

avec:

$$z_0 \in \mathbb{R}$$

$$q_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \& \quad \psi_z \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$$

α constante arbitraire

Kogelnik et Li^(KL 66) décomposent ensuite $q(z)$ en introduisant les paramètres réels $R(z)$ et $w(z)$:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{2iz}{w^2(z)} \quad (3.4)$$

On identifie alors, avec (3.2):

$$w^2(z_0) \doteq w_0^2 = 2iq_0 \quad (3.5)$$

$\vec{P}^2$ étant autoadjoint, l'évolution régie par (1.8) est unitaire:

$$\begin{aligned} \|\psi_z\|_2^2 &= \|\psi_{z_0}\|_2^2 = |\alpha|^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}b \, e^{-\frac{b^2}{2q_0}} \\ &= |\alpha|^{d-1} \Omega_{d-2} \int_0^\infty db \, b^{d-2} e^{-\frac{b^2}{2q_0}} \end{aligned}$$

où Ω_{d-2} est l'aire de la sphère S_{d-2} provenant de l'intégration sur les angles, et valant (SC 79)

$$\Omega_{d-2} = 2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \quad (3.6)$$

$$\int_0^\infty db \, b^{d-2} e^{-\frac{b^2}{2q_0}} = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{d-1}{2}) (2q_0)^{\frac{d-1}{2}} \quad (3.7)$$

(GR 80) p.337

d'où $\|\psi_z\|_2^2 = (|\alpha|^2 \pi 2q_0)^{\frac{d-1}{2}}$, ce qui permet d'écrire la solution normée (3.1), compte tenu de (3.3):

$$\psi(b, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\omega_0} \frac{q_0}{q(z)} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{\frac{i}{2\lambda} \frac{b^2}{q(z)}} \quad (3.8)$$

3.2 Interprétation géométrique des paramètres (KL 66) et collimation.

Visiblement, vu (3.4) et (3.8), $\omega(z)$ est le "diamètre" du faisceau en z : c'est la largeur de la gaussienne $|\psi_z|^2$ entre les deux points d'inflexion définis par $\frac{d^2 |\psi_z|^2}{db^2} = 0$

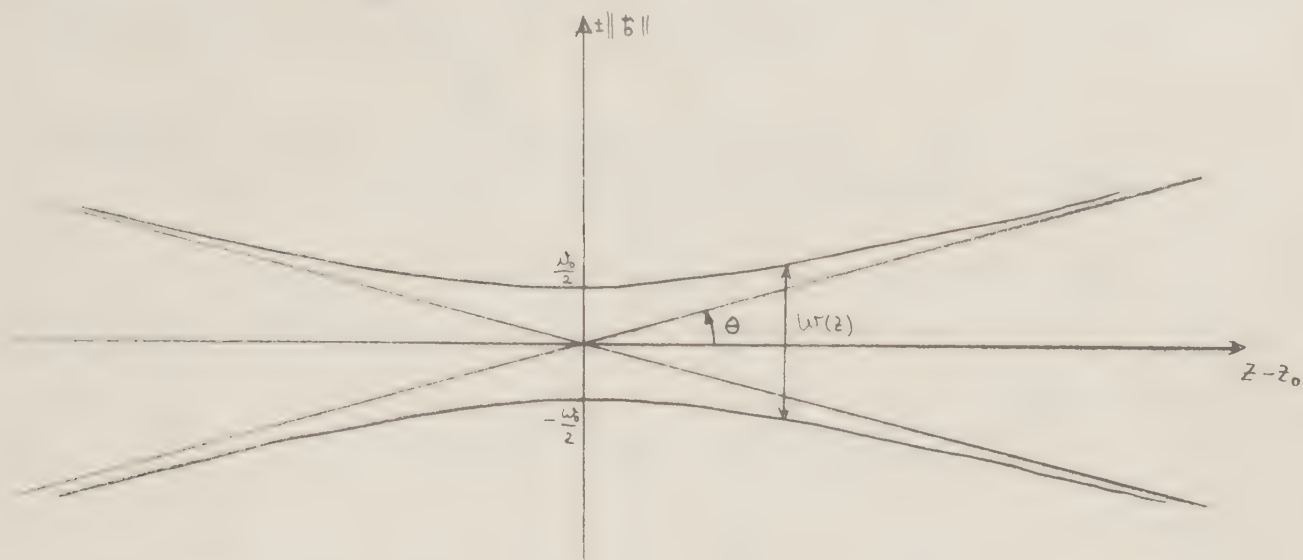
Par (3.4) et (3.2), on a:

$$\frac{2\lambda}{\omega^2(z)} = \operatorname{Im} \frac{1}{q(z)} = \frac{q_0}{|q(z)|^2} = \frac{q_0}{q_0^2 + (z - z_0)^2}$$

donc $\omega^2(z) = 2\lambda \left(q_0 + \frac{(z - z_0)^2}{q_0} \right)$, et avec (3.5):

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \omega_0 \sqrt{1 + \left(2\lambda \frac{z - z_0}{\omega_0^2} \right)^2} \\ &= \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{q_0} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le contour du faisceau est donc un hyperboloïde de révolution à une nappe, d'axe Oz, qu'on représente sur la figure suivante:

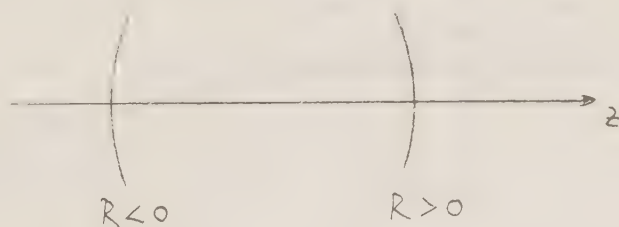


Les asymptotes sont données par:

$$\tan \theta = \frac{2\pm}{\omega_r} = \frac{\omega_0}{q_0} \quad (3.10)$$

qui mesure la divergence du faisceau ou, si on veut, un effet diffractif.

Quant à $R(z)$, on se convainc facilement^(KL 66) qu'il s'agit du rayon de courbure du front d'onde (celui-ci est de symétrie cylindrique autour de l'axe z et donc le tenseur de courbure est scalaire sur l'axe z) au point $(\vec{0}, z)$, défini positif si, de $z = +\infty$, on voit le front d'onde convexe:



Par (3.2), (3.4) et (3.5), on a:

$$R(z) = (z - z_0) \left(1 + \left(\frac{q_0}{z - z_0} \right)^2 \right) \quad (3.11)$$

(3.10) est bien une écriture des "relations de Heisenberg" (2.36) dans le cas "minimal": $\omega_0 t_g \theta = 2\lambda$. Le produit de la largeur du faisceau par son ouverture angulaire maximale (étalement en fonction de z) est une constante.

Exemple d'un faisceau LASER tel que $\omega_0 = 1$ mm, $\lambda = 100$ nm:

on trouve $t_g \theta = 2 \cdot 10^{-6}$: un tel faisceau est manifestement collimaté!

En effet, cherchons la signification du critère (2.22b) pour (3.8).

Comme $q' = 1$, on calcule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) &= - \left(\frac{1}{i\pi} \frac{\omega_0}{i\lambda} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{1}{q(z)} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d-1}{2} + \frac{i t^2}{2\lambda q(z)} \right) e^{\frac{i}{2\lambda} \frac{t^2}{q(z)}} \\ &= - \frac{1}{q(z)} \left(\frac{d-1}{2} + \frac{i t^2}{2\lambda q(z)} \right) \psi(t, z) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(2.22b) s'écrit $\lambda \left| \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \ll 1$, c'est-à-dire, après calcul:

$$\frac{\lambda}{|q(z)|} \left| \frac{d-1}{2} + \frac{i t^2}{2\lambda q(z)} \left(1 - \frac{1}{\frac{d-1}{2} + \frac{i t^2}{2\lambda q(z)}} \right) \right| \ll 1 \quad (3.13)$$

Vu (3.8), ψ ne prend de valeurs non négligeables que pour

$$\frac{t^2}{2\lambda} \operatorname{Im} \frac{1}{q(z)} \lesssim O(1)$$

c'est-à-dire, vu (3.4), (3.5) et (3.9), pour

$$\frac{t^2}{2\lambda |q|} \lesssim O\left(\sqrt{1 + \left(\frac{z-z_0}{q_0}\right)^2}\right)$$

On voit donc que, pour t^2 tel que $\psi(t, z)$ n'est pas négligeable:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\partial \psi}{\partial z} = O\left(\frac{\lambda}{q_0}\right) \quad (3.14)$$

Et donc (3.13) est vérifié ssi $\lambda \ll q_0$ soit, avec (3.5):

$$\lambda^2 < \omega_0^2 \quad (3.15)$$

ce qui montre bien, vu (3.10), que $t_g^2 \theta \ll 1$

Remarquons que l'approximation (A.20) (voir appendice A) donne le même résultat puisqu'elle s'écrit:

$$\lambda \left| \frac{\partial}{\partial z} \log \psi \right| \stackrel{(3.12)}{=} \frac{\lambda}{|q(z)|} \left| \frac{d-1}{2} + \frac{i b^2}{2 \pm q(z)} \right| \ll 1 \quad (3.16)$$

On verra toutefois dans l'appendice A qu'elle ne permet pas d'écrire l'équation "de Schrödinger" (2.20) et donc de trouver une base d'estimation de l'amplitude complexe ψ , vue comme "correction de Fresnel" à la solution donnée par l'optique géométrique^(GO 71), soit la partie eikonale de (2.22a):

$$e^{\frac{i}{\lambda} \int_0^z n(z,t) dz}$$

On trouvera une justification du terme "corrections de Fresnel" à la fin du paragraphe 4.5.

Dans l'exemple du faisceau LASER ci-dessus, ces corrections de Fresnel paraissent indispensables si l'on se réfère au critère donné par Gottfried^(GO 71): ce dernier délimite, dans le cadre de la diffraction, les domaines de validité de l'optique géométrique, de la diffraction de Fresnel, et de la diffraction de Fraunhofer en fonction du paramètre:

$$\frac{\lambda l}{R^2} = \frac{\lambda/R}{R/l} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} R = \text{rayon du diffuseur} \\ l = \text{distance au diffuseur} \end{array}$$

Explicitement:

$$\begin{array}{l} \left| \frac{\lambda l}{R^2} \ll 1 : \text{domaine de validité de l'optique géométrique (eikonale)} \right. \\ \left| \frac{\lambda l}{R^2} \geq O(1) : \quad " \quad " \quad " \quad \text{de la diffraction de Fresnel} \right. \\ \left| \frac{\lambda l}{R^2} \gg 1 : \quad " \quad " \quad " \quad \text{de la diffraction de Fraunhofer (qui} \right. \\ \quad \quad \quad \text{bien sûr est compris dans celui de la diffraction de} \\ \quad \quad \quad \text{Fresnel.)} \end{array}$$

Dans le cas de notre faisceau cohérent, on peut assimiler sa divergence à un effet diffractif et poser $2R = \omega_0$ et $l = z - z_0$:

$$\frac{\lambda l}{R^2} = \frac{4\lambda}{\omega_0^2} (z - z_0) \stackrel{\substack{(3.2) \\ (3.5)}}{=} -2 \frac{\operatorname{Re} q(z)}{\operatorname{Im} q(z)} \quad (3.17)$$

Pour l'exemple précédent, soit $w_0 = 1 \text{ mm}$ et $\lambda = 100 \text{ nm}$, $\frac{w_0^2}{4\lambda} = 2,5 \text{ m}$; les domaines de validité sont donc:

$$z - z_0 \ll 2,5 \text{ m} \quad \text{optique géométrique}$$

$$z - z_0 \sim 2,5 \text{ m} \quad \text{diffraction de Fresnel}$$

$$z - z_0 \gg 2,5 \text{ m} \quad \text{diffraction de Fraunhofer}$$

Ceci rend évidente la nécessité des "corrections de Fresnel", pour un tel faisceau utilisé à l'échelle du mètre.

3.3 Modes supérieurs.

Situons $\vec{b}$ par $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{d-1} \end{pmatrix}$ dans un système cartésien de $\mathbb{R}^{d-1}$.

On peut introduire dans l'équation (1.8) libre la forme:

$$\psi(\vec{b}, z) = \prod_1 \left(\frac{c b_1}{|q(z)|} \right) \cdots \prod_{d-1} \left(\frac{c b_{d-1}}{|q(z)|} \right) e^{-\frac{i}{2} (A(z) - \frac{\vec{b}^2}{2q(z)})}$$

Le calcul montre que $q(z)$ garde la forme (3.2) et que

$$c = \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} q(z)}, \text{ donc } \frac{c}{|q(z)|} = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \frac{1}{q(z)}} \stackrel{(3.4)}{=} \frac{\sqrt{2}}{w(z)}$$

Pour un faisceau d'intensité finie, ψ_z est de carré intégrable pour tout z ; le calcul livre alors une base de $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ dépendant de z :

$$\begin{aligned} \psi_{m_z}(\vec{b}) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} 2^{-\frac{|m|}{2}} (m!)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{w_0} \frac{q_0}{q(z)} \right)^{\frac{d-1}{2}} \\ &\times \prod_{j=1}^{d-1} H_{m_j} \left(\frac{\sqrt{2} b_j}{w(z)} \right) e^{i \left(\frac{\vec{b}^2}{2\lambda q(z)} - |m| \arctg \frac{z - z_0}{q_0} \right)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

m est le multi-indice $(m_1, \dots, m_{d-1})$; $|m| = \sum_{j=1}^{d-1} m_j$; $m! = \prod_{j=1}^{d-1} m_j!$

Les H_{m_j} sont les polynômes d'Hermite.

La base ainsi écrite est orthonormée: $(\psi_{m_z}, \psi_{p_z}) = \delta_{mp}$

Si q est le même que pour le mode fondamental (3.8), le paramètre A dépend du mode par l'adjonction d'un déphasage:

$$\varphi_m = |m| \arctg \frac{z-z_0}{q_0}$$

Pour $d = 3$, on retrouve bien les modes cartésiens de Kogelnik et Li.

On peut aussi chercher les modes de symétrie cylindrique autour de l'axe z ; $\hat{b}$ est alors représenté par des coordonnées sphériques de $\mathbb{R}^{d-1}$:

$$\begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}_+, \quad \hat{b} \in S^{d-2} \quad (3.19)$$

Le laplacien s'écrit^(VI 69):

$$\Delta = \frac{1}{b^{d-2}} \frac{\partial}{\partial b} b^{d-2} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{b^2} \Delta_0. \quad (3.20)$$

Δ_0 est la partie angulaire du laplacien et a pour fonctions propres les fonctions sphériques sur S^{d-2} (voir (VI 69) pp.507 et 480):

$$\sum_{m=0}^{d-1}, \quad m \text{ multi-indice } (m_0 = l, m_1, m_2, \dots, m_{d-3})$$

avec $m_0 = 0, 1, 2 \dots$ pour $d \geq 4$; $m_0 \in \mathbb{Z}$ pour $d=3$

et $m_0 = l \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq |m_{d-3}| \geq 0$

pour les valeurs propres $-l(l+d-3)$ (3.21)

L'ensemble des $\sum_{m=0}^{d-1}$ forme une base orthonormée de $L^2(S^{d-2})$.

Cas particuliers:

- $d = 3 \Rightarrow m = m_0 = l, \quad \sum_{m=0}^2 \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad \text{val. pr. } -m^2$
- $d = 4 \Rightarrow m = (l, m_1), \quad \sum_{m=0}^3 \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = Y_{m_1}^l(\hat{b}), \quad \text{val. pr. } -l(l+1)$

On introduit alors dans (1.8) libre une solution de la forme:

$$\psi(b, z) = \left(\frac{cb}{|q(z)|} \right)^l f\left(\frac{cb}{q(z)} \right) e^{-\frac{i}{2} \left(A(z) - \frac{b^2}{x q(z)} \right)} \sum_{m=0}^{d-1} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} (\hat{b})$$

en exigeant que $\|\psi\|_2 < \infty$.

Le calcul livre une nouvelle base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ dépendant de z :

$$\psi_{pmz}(b) = 2^{\frac{d+1}{4}} \sqrt{\frac{p!}{\Gamma(p+l+\frac{d-1}{2})}} \left(\frac{1}{w_0} \frac{q_0}{q(z)} \right)^{\frac{d-1}{2}} \quad (3.22)$$

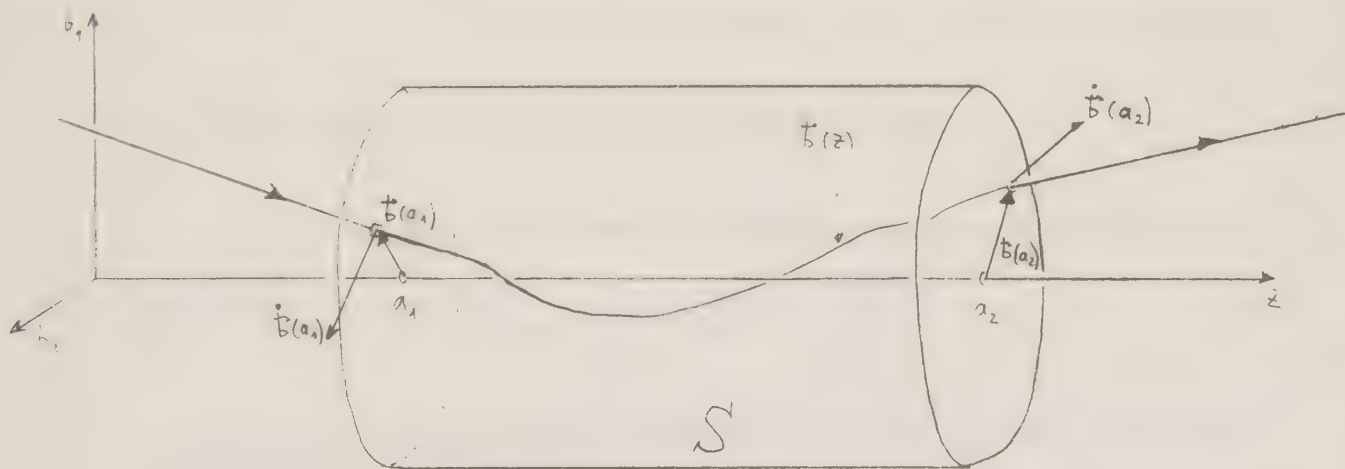
$$\left(\frac{\sqrt{2} b}{w(z)} \right)^p L_p^{l+\frac{d-3}{2}} \left(\frac{2b^2}{w^2(z)} \right) e^{i \left(\frac{b^2}{2q(z)} - (2p+l) \arctg \frac{z-z_0}{q_0} \right)} \Xi_m^{d-1}(b)$$

Les L_p^α sont les polynômes de Laguerre généralisés.

Ici aussi, pour $d = 3$, on retrouve les modes cylindriques de Kogelnik et Li (KL 66).

3.4 Optique des faisceaux et matrices de transfert.

Restreignons-nous au cas $d = 3$, et considérons un système optique S compris entre les plans $z = a_1$ et $z = a_2$, de symétrie cylindrique autour de l'axe z , et traversé par un rayon lumineux $\vec{b}(z)$.



- L'indice de réfraction n est isotrope c'est-à-dire indépendant de $\vec{b} \Rightarrow \frac{dn}{d\vec{b}} = 0$, comme on l'a d'ailleurs supposé jusqu'ici.
- Symétrie cylindrique $\Rightarrow n$ ne dépend que de b^2 .

Considérons des trajectoires collimatées: $\dot{\vec{b}}^2 \ll 1 \quad \forall z$

On a vu au paragraphe 2.2 que de telles trajectoires sont régies par le hamiltonien (2.12):

$$h(\vec{b}, \vec{p}, z) = \frac{\vec{p}^2}{2n(\vec{b}, z)} - n(\vec{b}, z)$$

où $\vec{p}$ est lié à la "pente" $\dot{\vec{b}}$ par:

$$\vec{p} = n \dot{\vec{b}} \quad (3.23)$$

L'espace de phase $E = \left\{ \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \right\}$ est muni d'une structure symplectique.

En particulier, si $z \mapsto \vec{b}(z)$ est une solution des équations de Hamilton, on a:

$$\vec{y}(a_2 + 0) = T(\vec{y}(a_1 - 0)) \quad (3.24)$$

où T est une transformation canonique de E .

Supposons n dérivable par rapport à $\vec{b}$ en $\vec{b} = \vec{0}$, pour tout z ; la symétrie cylindrique impose:

$$\left| \begin{array}{l} n(\vec{b}, z) = n_0(z) (1 - \nu(z) \vec{b}^2) + O(\|\vec{b}\|^4) \\ n_0 \text{ et } \nu \text{ sont tels que } n \geq 1 \text{ au voisinage de } \vec{b} = \vec{0} \\ n_0(a_1 - 0) = n_0(a_1 + 0) = 1 \\ \nu(a_1 - 0) = \nu(a_1 + 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Supposons de plus que Σ est limité à une région où

$$|\nu(z) \vec{b}^2| \ll 1 \quad (3.26)$$

Avec ces hypothèses supplémentaires, le hamiltonien devient:

$$h(\vec{b}, \vec{p}, z) = \frac{\vec{p}^2}{2n_0(z)} - n_0(z) (1 - \nu(z) \vec{b}^2) \quad (3.27)$$

et est donc de degré 2 en $\vec{y}$: la transformation canonique T (3.24) est alors linéaire: $T \in Sp(4, \mathbb{R})$

Comme $n(\vec{b}, a_1 - 0) = n(\vec{b}, a_1 + 0) = 1$, cela revient à écrire:

$$\begin{pmatrix} \vec{b}(a_2 + 0) \\ \dot{\vec{b}}(a_2 + 0) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \vec{b}(a_1 - 0) \\ \dot{\vec{b}}(a_1 - 0) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

et la symétrie cylindrique implique que T est de la forme:

$$T = \left(\begin{array}{c|c} A \mathbb{1}_2 & B \mathbb{1}_2 \\ \hline C \mathbb{1}_2 & D \mathbb{1}_2 \end{array} \right), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

D'autre part: $T \in S_p(4, \mathbb{R}) \Leftrightarrow T \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AD - BC = 1$

ce qui signifie que la matrice $t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est elle aussi symplectique:

$$t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in S_p(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) \quad (3.30)$$

C'est le formalisme usuel de la matrice de transfert dans l'optique des faisceaux^(KL 66): cette matrice relie la position $\vec{b}$ et la pente $\vec{b}'$ d'un rayon lumineux en $z = a_2 + 0$ ("sortie" d'un système optique linéaire) à ces mêmes grandeurs en $z = a_1 - 0$ ("entrée" de ce même système).

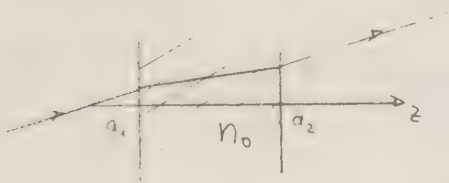
Exemples (KL 66)

- 1) Espace libre: $e = a_2 - a_1$



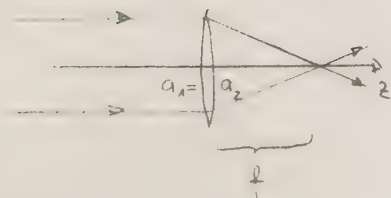
$$t \equiv l(e) = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

- 2) Lame d'épaisseur e , et d'indice de réfraction n_0 :



$$t = l\left(\frac{e}{n_0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

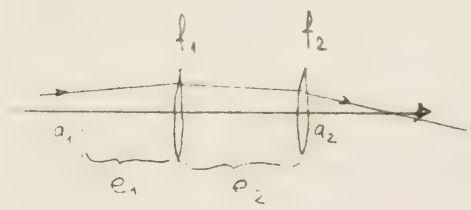
- 3) Lentille mince de focale f :



$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$f > 0$: lentille convergente
 $f < 0$: lentille divergente

4) Deux espaces libres et deux lentilles minces:



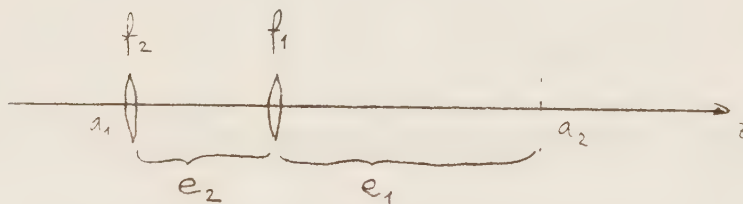
$$t = \begin{pmatrix} 1 - \frac{e_2}{f_1} & e_1 + e_2 + \frac{e_1 e_2}{f_1} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{e_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{e_1}{f_1} - \frac{e_2}{f_2} \\ -\frac{e_1}{f_2} + \frac{e_1 e_2}{f_1 f_2} & -\frac{e_1}{f_2} + \frac{e_1 e_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Remarques:

- a_1 , a_2 et t étant donnés, $A \neq 1$, on peut toujours trouver un système optique équivalent du type (3.34), représenté par le même triple (t, a_1, a_2) . Explicitement, le calcul des paramètres de (3.34) donne:

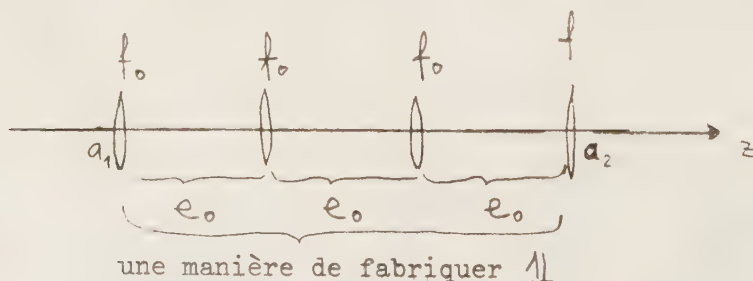
$$\left| \begin{array}{ll} e_1 = \frac{B - (a_2 - a_1)}{A - 1} & e_2 = \frac{A(a_2 - a_1) - B}{A - 1} \\ f_1 = -\frac{e_2}{A - 1} & f_2 = \frac{A e_2}{A - 1 - C e_2} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

- Si $A = 1$ et $D \neq 1$, on peut donner le système équivalent:



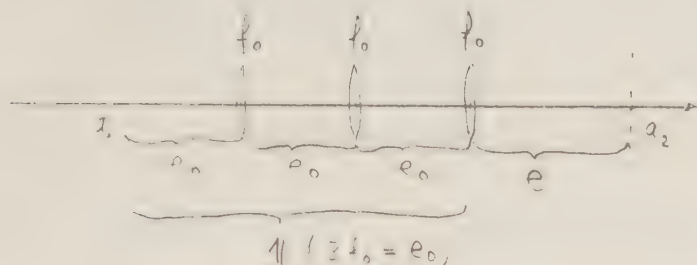
les paramètres étant donnés par (3.35) où l'on remplace A par D .

- Si $A = D = 1$ et $C \neq 0$, $a_1 \neq a_2$ ($\neq$ lentille mince)
(on a alors $B = 0$ puisque $\det t = 1$), on peut prendre le système:



avec $f = -\frac{1}{C}$ et $3f_0 = e_0 = \frac{a_2 - a_1}{3}$ (3.36)

Enfin, si $A = D = 1$ et $C = 0$ mais $B \neq a_2 - a_1$ ($\neq$ espace libre)
prenons par exemple;



avec $2e_0 = e_0$, $e = B$

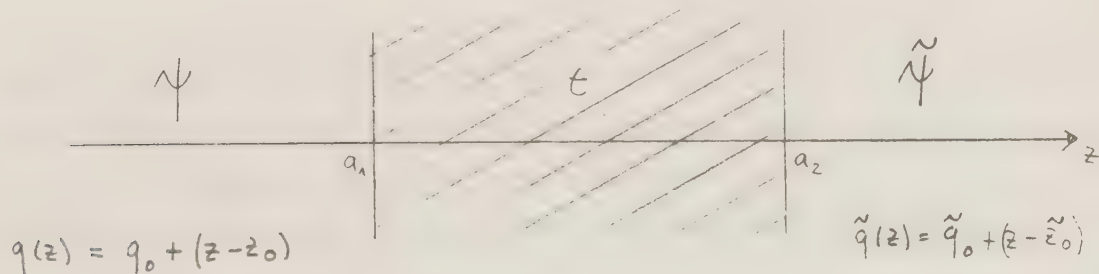
et $3e_0 + e = a_2 - a_1$

En conséquence, pour tout système optique linéaire compris entre a_1 et a_2 , on peut trouver une suite de lentilles minces et d'espaces libres dont l'effet est décrit par la même matrice t . (3.37)

3.5 Paramètre $q(z)$ et optique géométrique.

Imaginons un faisceau de lumière décrit par deux solutions de (1.8) libre du type (3.8), de chaque côté d'un système optique linéaire donné par:

$$(t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, a_1, a_2)$$



$$q(z) = q_0 + (z - z_0)$$

$$\tilde{q}(z) = \tilde{q}_0 + (z - \tilde{z}_0)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + \frac{2iz}{\omega^2}$$

$$\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{\tilde{R}} + \frac{2i\tilde{z}}{\tilde{\omega}^2}$$

Rappelons d'une part que donner $q(z)$, c'est-à-dire (z_0, q_0) revient à donner l'onde ψ elle-même (voir (3.8)), et d'autre part que t relie les grandeurs géométriques $(\tilde{b}(a_1), \tilde{b}'(a_1))$ et $(\tilde{b}(a_2), \tilde{b}'(a_2))$ pour un rayon lumineux $z \mapsto \tilde{b}(z)$ qui traverserait le système optique linéaire.

- Pour un espace libre: $t = \ell(a_2 - a_1)$, on aura évidemment:

$$\tilde{\psi} = \psi \quad ; \quad \tilde{q}(a_2) = q(a_1) + a_2 - a_1 \quad \text{c'est-à-dire:}$$

$$\tilde{q}(a_2) = h_{\ell(a_2 - a_1)} q(a_1) \quad (3.38)$$

où h_t est l'homographie correspondant à $t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$:

$$h_t x \stackrel{d}{=} \frac{Ax + B}{Cx + D} \quad (3.39)$$

- Pour une lentille mince: $a_1 = a_2$; $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

- La largeur du faisceau est continue à travers la lentille:

$$\tilde{w}(a_2) = w(a_1) \quad , \text{ ou encore:}$$

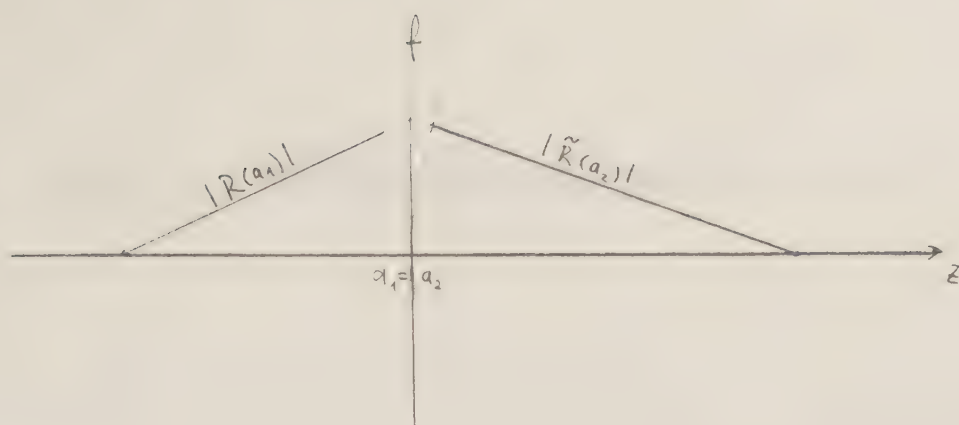
$$\operatorname{Im} \frac{1}{\tilde{q}(a_2)} = \operatorname{Im} \frac{1}{q(a_1)}$$

- Quant aux rayons de courbure des fronts en $\tilde{b} = \vec{0}$, ils sont liés par la relation:

$$\frac{1}{\tilde{R}(a_2)} = \frac{1}{R(a_1)} - \frac{1}{f} \quad , \text{ ou encore:}$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\tilde{q}(a_2)} = \operatorname{Re} \frac{1}{q(a_1)} - \frac{1}{f}$$

[Pour le voir (KL 66), considérer deux ondes sphériques dont les fronts ont respectivement les rayons de courbure $\tilde{R}(a_1)$ et $R(a_1)$ en $z = a_1 = a_2$, avec la convention de signe du paragraphe 3.2, et appliquer la formule des lentilles minces aux rayons associés:



$$\frac{1}{|R(a_1)|} + \frac{1}{|\tilde{R}(a_2)|} = \frac{1}{f}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{R(a_1)} - \frac{1}{\tilde{R}(a_2)} = \frac{1}{f} \quad]$$

On a donc obtenu:

$$\frac{1}{\tilde{q}(a_2)} = \frac{1}{q(a_1)} - \frac{1}{f} = \frac{1 - \frac{1}{f} q(a_1)}{q(a_1)} = \frac{C q(a_1) + D}{A q(a_1) + B}$$

c'est-à-dire qu'on retrouve, ici aussi:

$$\tilde{q}(a_2) = h_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}} q(a_1) \quad (3.40)$$

En vertu de l'énoncé (3.37) et de la propriété de composition des homographies ($h_{t_1} \circ h_{t_2} = h_{t_1 t_2}$), on déduit de (3.38) et (3.40) que pour tout système optique linéaire caractérisé par (t, a_1, a_2) :

$$\tilde{q}(a_2) = h_t q(a_1) \quad (3.41)$$

Comme $\tilde{q}(z) = \tilde{q}(a_2) + z - a_2$, (3.41) donne la connexion entre ψ et $\tilde{\psi}$, et permet en particulier de calculer la transformation de q_0 et z_0 :

$$\tilde{q}_0 = \frac{q_0}{c^2 q_0^2 + [C(a_1 - z_0) + D]^2} = \frac{q_0}{|C(q(z) - z + a_1) + D|^2} \quad (3.42)$$

$$\tilde{z}_0 - a_2 = - \frac{Ac[q_0^2 + (a_1 - z_0)^2] + (AD + BC)(a_1 - z_0) + BD}{c^2 q_0^2 + [C(a_1 - z_0) + D]^2}$$

3.6 Caractérisation d'un pinceau lumineux.

La forme (3.8) des solutions de l'équation "de Schrödinger" (1.8) libre se prête bien à la description de faisceaux qui s'approchent de l'idéalisation du rayon lumineux: des pinceaux de lumière.

Considérons une longueur caractéristique $\frac{1}{c}$ ($c \neq 0$) associée à un système optique linéaire représenté par (t, a_1, q_1) . On dira qu'une solution de la forme (3.8) décrit un pinceau lumineux si:

- d'une part, la largeur du faisceau est beaucoup plus petite que $\frac{1}{c}$:

$$\omega_0 \ll \frac{1}{c}$$

- d'autre part, si la divergence du faisceau ((3.10)) est faible (i.e. si le faisceau est collimaté):

$$\frac{2\pm}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{q_0} \ll 1$$

Si $|C(a_1 - z_0) + D|$ est de l'ordre de 1, ces inégalités impliquent, avec (3.42) et (3.5):

$$\begin{aligned} \bullet \bullet \left(\frac{\tilde{\omega}_0}{\tilde{q}_0} \right)^2 &= \frac{2\pm}{\tilde{q}_0} = 2\pm \left(c^2 q_0 + \frac{[C(a_1 - z_0) + D]^2}{q_0} \right) \\ &= c \omega_0^2 + \frac{4\pm^2}{\omega_0^2} [C(a_1 - z_0) + D]^2 \ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{c^2 \tilde{\omega}_0} &= \frac{1}{2\pm c^2} \frac{1}{\tilde{q}_0} = \frac{1}{2\pm c} \left(c^2 q_0 + \frac{[C(a_1 - z_0) + D]^2}{q_0} \right) \\ &= \frac{\omega_0^2}{4\pm^2} + \frac{1}{c^2 \omega_0^2} [C(a_1 - z_0) + D]^2 \gg 1 \end{aligned}$$

Donc, pour un système optique linéaire tel que $|C(a_1 - z_0) + D| = O(1)$,
un pinceau se transforme en un pinceau.

3.7 Succession de systèmes optiques linéaires.

Regardons le système:



composé de deux systèmes linéaires notés (t_a, a_1, a_2) et (t_b, b_1, b_2) .

On peut construire un produit qui représente le système composé; visiblement:

$$(t_a, a_1, a_2)(t_b, b_1, b_2) = (t_a \ell(a_1 - b_2) t_b, b_1, a_2) \quad (3.43)$$

où, rappelons-le, $\ell(e) = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de transfert pour l'espace

libre de longueur e .

Cette loi de composition est interne et associative dans $\{(t_a, a_1, a_2)\}$ mais n'y admet pas d'élément neutre. En effet, il n'existe pas de système optique linéaire (t_e, e_1, e_2) fixe tel que

$$(t_a, a_1, a_2)(t_e, e_1, e_2) = (t_a, a_1, a_2) \quad \forall (t_a, a_1, a_2)$$

Cela décrit le fait que les positions relatives sur l'axe z de deux systèmes optiques linéaires n'est pas indifférente!

Toutefois, il existe un ensemble d'éléments qui laissent le paramètre q invariant:

$$\tilde{q}_0 = q_0 \quad \forall q_0, z_0 \quad \stackrel{(3.42)}{\Rightarrow} \quad C = 0, D^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0 &= z_0 \quad \forall q_0, z_0 \quad \stackrel{(3.42)}{\Rightarrow} \quad z_0 - a_2 = AD(a_1 - z_0) - BD \\ &\Rightarrow AD = 1 \text{ et } a_2 - a_1 = BD \end{aligned}$$

$$A = D = \pm 1 \quad \text{et} \quad a_2 - a_1 = \pm B$$

Ces éléments ont donc la forme attendue:

$$(\pm \ell(r-s), s, r) \quad (3.44)$$

Définissons alors la relation:

$$\left| \begin{array}{l} (t_a, a_1, a_2) \sim (t_b, b_1, b_2) \iff \exists r, s \in \mathbb{R} \\ (t_a, a_1, a_2) = (\ell(r), 0, r) (t_b, b_1, b_2) (\ell(-s), s, 0) \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Dans ce cas, vu (3.43) et comme $\ell(x)\ell(y) = \ell(x+y)$:

$$(t_a, a_1, a_2) = (\ell(r-b_2) t_b \ell(b_1-s), s, r)$$

d'où $s = a_1$ et $r = a_2$.

(3.45) s'écrit donc aussi:

$$(t_a, a_1, a_2) \sim (t_b, b_1, b_2) \iff t_a = \ell(a_2-b_2) t_b \ell(b_1-a_1) \quad (3.45)'$$

qui possède une signification géométrique évidente: aller de a_1 à a_2 par le transfert t_a = aller de a_1 à b_1 librement, puis de b_1 à b_2 par le transfert t_b , et enfin de b_2 à a_2 librement.

De plus:

- $t_a \sim t_a$ puisque $1 = \ell(0)$
- $t_a \sim t_b \Rightarrow t_b \stackrel{(3.45)'}{=} \ell^{-1}(a_2-b_2) t_a \ell^{-1}(b_1-a_1) = \ell(b_2-a_2) t_a \ell(a_1-b_1) \stackrel{(3.45)'}{\sim} t_a$
- $t_a \sim t_b \sim t_c \Rightarrow t_a = \ell(a_2-b_2) \ell(b_2-c_2) t_c \ell(c_1-b_1) \ell(b_1-a_1) = \ell(a_2-c_2) t_c \ell(c_1-a_1) \stackrel{(3.45)'}{\sim} t_c$

(3.45) définit donc une relation d'équivalence.

Considérons alors l'ensemble G des classes d'équivalence:

$$G \ni g_a \stackrel{\sim}{=} [t_a, a_1, a_2] = \{ (t_x, x_1, x_2) \mid (t_x, x_1, x_2) \sim (t_a, a_1, a_2) \}$$

G hérite de la loi de composition (3.43):

$$[t_a, a_1, a_2] [t_b, b_1, b_2] = [t_a \ell(a_1-b_2) t_b, b_1, a_2] \quad (3.43)'$$

Cette loi est

• associative (clair!)

• elle admet l'élément neutre $e = [\ell(r-s), s, r] \stackrel{(3.45)'}{=} [1, 0, 0]$ (3.46)

• tout élément admet par rapport à elle l'inverse:

$$[\ell_a, a_1, a_2]^{-1} = [\ell(r-a_1) \ell_a^{-1} \ell(a_2-s), s, r] \stackrel{(3.45)'}{=} [\ell_a^{-1}, a_2, a_1] \quad (3.47)$$

qui correspond au système optique inversé!

G muni de ce produit est donc bien un groupe; il suffit de poser par exemple, $b_1 = b_2 = 0$ dans (3.45)' pour constater qu'en fait, il s'agit du groupe $\Sigma_P(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})$!

L'ensemble des fonctions $z \mapsto q(z)$ est le demi-plan supérieur

$H = \{z_0 + i q_0 \mid z_0 \in \mathbb{R}, q_0 \in \mathbb{R}_+\}$, et la transformation $R(g) : q \mapsto \tilde{q}$

associée à la classe de systèmes optiques linéaires représentée par

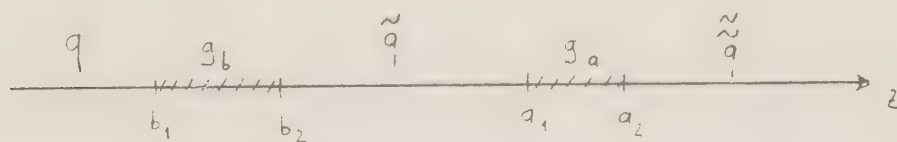
$g \in SL(2, \mathbb{R})$ est une permutation de H ; notons $R(g) \in \text{Perm } H$

Donnons-nous deux systèmes optiques linéaires:

$$g_a = [\ell_a, a_1, a_2] \quad \text{et} \quad g_b = [\ell_b, b_1, b_2]$$

et les permutations de H associées:

$$\tilde{q} = R(g_b) q \quad ; \quad \tilde{\tilde{q}} = R(g_a) \tilde{q} = R(g_a) R(g_b) q$$



$R(g_a)$ est donné par:

$$\tilde{q}(z) = \tilde{q}(b_2) + (z - b_2) \stackrel{(3.41)}{=} h_{\ell_b} q(b_1) + (z - b_2)$$

c'est-à-dire:

$$(R(g_b) q)(z) = h_{\ell_b} (q(z) - (z - b_1)) + (z - b_2) \quad (3.48)$$

De même :

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}(z) &= \tilde{q}(a_2) + (z - a_2) \stackrel{(3.41)}{=} h_{t_a} \tilde{q}(a_1) + (z - a_2) \\
 &\stackrel{(3.41)}{=} h_{t_a} h_{\ell(a_1 - b_2)} \tilde{q}(b_2) + (z - a_2) \\
 &\stackrel{(3.41)}{=} h_{t_a} h_{\ell(a_1 - b_2)} h_{t_b} q(b_1) + (z - a_2)
 \end{aligned}$$

d'où

$$(R(g_a) R(g_b) q)(z) = h_{t_a \ell(a_1 - b_2) t_b} (q(z) - (z - b_1)) + (z - a_2) \quad \forall q$$

ce qui se lit, vu (3.43)' et (3.48):

$$R(g_a) R(g_b) = R(g_a g_b) \quad (3.49)$$

$R: SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Perm } \mathcal{H}$ est donc un homomorphisme qui transporte la structure de groupe construite sur les systèmes optiques linéaires (optique géométrique) dans l'ensemble des transformations des ondes du type (3.8), et donc, vu les bases (3.18) ou (3.22), dans celui des transformations des solutions ψ de (1.8) libres telles que $\|\psi_z\|_2 < \infty$ (optique ondulatoire).

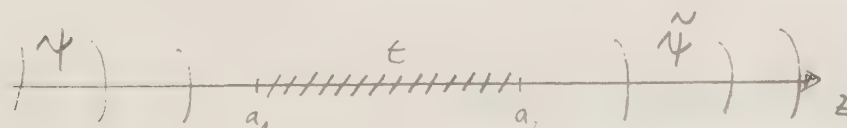
8. OPTIQUE ONDULATOIRE DES SYSTEMES LINEAIRES.

Au chapitre précédent, nous avons vu comment les ondes du type (3.8) se transformaient en traversant un système optique linéaire, à partir de considérations d'optique géométrique. Le propos de ce chapitre-ci est de discuter cette transformation pour une onde ψ quelconque de carré intégrable: relier ψ au "temps" z à son image $\tilde{\psi}$ au même "temps" z , c'est par définition, en théorie de la diffusion, l'action de la matrice $\underline{S}$, qui apparaîtra ici comme représentation (projective) de $SL(2, \mathbb{R})$, ce qui constitue un lien avec l'optique géométrique. Ainsi les plans focaux ou les plans images trouvent une caractérisation ondulatoire. Enfin, ce lien apparaît de façon naturelle dans le formalisme des fonctions génératrices (AH 82).

4.1 Matrice $\underline{S}$ d'un système optique linéaire.

Soient ψ et $\tilde{\psi}$ deux solutions de carré intégrable de l'équation (1.8) libre, et "raccordées" par un système optique linéaire représenté par

$$g = [t, a_1, a_2] \quad , \quad t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$



? Existe-t-il un opérateur linéaire unitaire $\underline{S}_2(g)$ tel que:

$$\tilde{\psi}_2 = e^{i\alpha} \underline{S}_2(g) \psi_2 \quad (4.1)$$

(La phase relative n'est pas définie par le "raccord", mais $\tilde{\psi}_2$ et ψ_2 ne sont de toute manière définis qu'à un facteur de module 1 près.)

Cherchons $\underline{S}_z(g)$ de la forme:

$$(\underline{S}_z(g) \psi_z)(b) = N_z(g) \int d^2 b' e^{-\frac{i}{\hbar} W_z(g)(b', b)} \quad (4.2)$$

et essayons pour $W_z(g)$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$W_z(g)(b', b) = -\frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{\delta_z(g)} + 2 \frac{b \cdot b'}{\beta_z(g)} + \frac{b'^2}{\gamma_z(g)} \right) \quad (4.3)$$

Introduisons dans (4.2) des solutions du type (3.8). On cherche donc $N_z(g)$, $\delta_z(g)$, $\beta_z(g)$ et $\gamma_z(g)$ tels que:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}(z)} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{b^2}{\tilde{q}(z)}} = e^{i\alpha} \frac{1}{\omega_0} \frac{q_0}{q(z)} N_z(g) \int d^2 b' e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{b^2}{\delta_z(g)} + 2 \frac{b \cdot b'}{\beta_z(g)} + \frac{b'^2}{\gamma_z(g)} \right)} \quad (4.4)$$

$$\text{où} \quad \frac{1}{u_z(g)} = \frac{1}{\gamma_z(g)} + \frac{1}{q(z)} \quad (4.5)$$

Cette transformée de Fourier s'écrit aussi:

$$\frac{e^{i\alpha}}{\omega_0} \frac{q_0}{q(z)} N_z(g) 2\pi \int_0^\infty db' b' e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{b^2}{\delta_z(g)} + \frac{b'^2}{u_z(g)} \right)} J_0 \left(\frac{b b'}{\hbar \beta_z(g)} \right)$$

soit ((GR 80) p. 717):

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}(z)} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{b^2}{\tilde{q}(z)}} \equiv \frac{e^{i\alpha}}{\omega_0} \frac{q_0}{q(z)} N_z(g) 2\pi i \frac{1}{\hbar} u_z(g) e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{\delta_z(g)} - \frac{u_z(g)}{\beta_z^2(g)} \right) b^2} \quad (4.6)$$

• Identification des exposants.

L'identité ci-dessus implique:

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{\delta_z(g)} - \frac{u_z(g)}{\beta_z^2(g)} \stackrel{(4.5)}{=} \frac{1}{\delta_z(g)} \frac{\left(\frac{1}{\gamma_z(g)} - \frac{\delta_z(g)}{\beta_z^2(g)} \right) q(z) + 1}{\frac{1}{\gamma_z(g)} q(z) + 1}$$

$\tilde{q}(z)$ est d'autre part donné par la relation (3.48), si bien qu'on peut calculer les paramètres de la forme quadratique $W_2(q)$. On obtient:

$$\begin{aligned} \delta_2(q) &= z - a_2 + \frac{B - A(z - a_1)}{D - C(z - a_1)} \\ \gamma_2(q) &= -(z - a_1) + \frac{B + D(z - a_2)}{A + C(z - a_2)} \\ \beta_2(q) &= \pm \left\{ C(z - a_1)(z - a_2) + A(z - a_1) - D(z - a_2) - B \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Des fonctions du type (3.8), trop symétriques, ne permettent pas de lever l'ambiguïté du signe de $\beta_2(q)$. Nous verrons au paragraphe suivant qu'il convient de choisir le signe +.

• Détermination de $N_2(q)$.

L'identité (4.6) fournit:

$$N_2(q) = \frac{e^{-i\alpha}}{2i\pi k} \frac{\omega_0}{\tilde{\omega}_0} \frac{q(z)}{\tilde{q}(z)} \frac{1}{u_2(q)} \stackrel{(3.5)}{=} \frac{e^{-i\alpha}}{2i\pi k} \sqrt{\frac{\tilde{q}_0}{q_0}} \frac{q(z)}{\tilde{q}(z)} \frac{1}{u_2(q)}$$

$$\text{et } \frac{q(z)}{\tilde{q}(z)} = q(z) \left(\frac{1}{\delta_2(q)} - \frac{u_2(q)}{\beta_2^2(q)} \right)$$

D'autre part, (3.48) et (4.7) permettent d'établir que:

$$C(q(z) - z + a_1) + D = - \frac{\beta_2(q)}{u_2(q)} q(z) \left(\frac{1}{\delta_2(q)} - \frac{u_2(q)}{\beta_2^2(q)} \right)$$

$$\text{d'où } \frac{q(z)}{\tilde{q}(z)} \frac{1}{u_2(q)} = - \frac{1}{\beta_2(q)} \left(C(q(z) - z + a_1) + D \right)$$

Enfin, selon (3.42):

$$\frac{\tilde{q}_0}{q_0} = \frac{1}{|C(q(z) - z + a_1) + D|} \quad \text{si bien que:}$$

$$N_z(g) = - \frac{e^{-i\alpha}}{2i\pi\lambda} \frac{1}{\beta_z(g)} e^{i \arg(C(q(z) - z + a_1) + D)}$$

On veut bien sûr que $N_z(g)$ ne dépende pas de ψ !

Mais $\arg(C(q(z) - z + a_1) + D) \stackrel{(3.4)}{=} \arg(Cq(a_1) + D)$ est indépendant de z et peut donc être considéré comme phase α , par exemple (celle-ci étant arbitraire!). Avec ce choix, le facteur de normalisation est simplement:

$$N_z(g) = \frac{i}{2\pi\lambda\beta_z(g)} \quad (4.8)$$

En résumé:

$$\left| \begin{aligned} (\underline{S}_z(g) \psi_z)(t) &= \frac{i}{2\pi\lambda\beta_z(g)} \int d^2b' e^{\frac{i}{2\lambda} \left(\frac{b'^2}{\delta_z(g)} + 2 \frac{b \cdot b'}{\beta_z(g)} + \frac{b'^2}{\gamma_z(g)} \right)} \psi_z(b') \\ \text{où } \delta_z, \beta_z \text{ et } \gamma_z &\text{ sont donnés par (6.7).} \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

Cette formule n'est bien sûr valable que pour z tel que $\delta_z(g)$, $\beta_z(g)$ et $\gamma_z(g)$ sont non nuls. Il peut arriver que la phase fasse un saut aux points z_i où ces paramètres s'annulent (voir paragraphe (4.5)).

Si maintenant on applique l'opérateur $\underline{S}_z(g)$ à un mode $\psi_{m,z}$ (3.18) pour $d = 3$, on constate après quelques calculs qu'on retrouve le mode $\tilde{\psi}_{m,z}$ à une phase près. Par conséquent, pour les z tels que δ_z , β_z et γ_z sont non nuls, $\underline{S}_z(g)$ applique une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur une autre base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

$\underline{S}_z(g)$ est donc un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

4.2 Application à un pinceau de lumière.

Si ψ décrit un pinceau (voir paragraphe 3.6), on souhaiterait que $z \mapsto \underline{S}_z(g), \psi_z$ décrive le pinceau lié au précédent par l'optique géométrique linéaire de la formule (3.28).

Il s'agit tout d'abord de décrire un pinceau quelconque par une fonction ψ solution de l'équation (1.8) libre.

Partons d'un pinceau parallèle, et visiblement solution de cette équation puisque celle-ci est invariante de translation (en t):

$$\psi_z(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{q_0}{q(z)} e^{\frac{i}{2} \frac{(t-t_c)^2}{q(z)}} \stackrel{(3.18)}{=} \psi_{0z}(t-t_c)$$

et appliquons $\underline{S}_z(g)$:

$$(\underline{S}_z(g)\psi_z)(t) \stackrel{(4.2)}{=} N_z(g) \int d^2b' e^{-\frac{i}{2} W_z(g)(t'+t_c, t)} \psi_{0z}(t')$$

Avec (4.3), on calcule:

$$\begin{aligned} -W_z(g)(t'+t_c, t) &= -W_z(g)(t', t + \frac{\beta_z(g)}{\gamma_z(g)} t_c) \\ &+ \left(1 - \frac{\beta_z^2(g)}{\delta_z(g)\gamma_z(g)}\right) \left(\frac{t^2}{2\gamma_z(g)} + \frac{t \cdot t_c}{\beta_z(g)}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reprenons pour un instant l'indétermination quant au signe de $\beta_z(g)$ (formules (4.7)); selon que

$$\beta_z(g) = (\pm) [C(z-a_1)(z-a_2) + A(z-a_1) - B(z-a_2) - B],$$

les formules (4.7) donnent:

$$\left| \begin{aligned} \frac{\beta_z(g)}{\gamma_z(g)} &= (\pm) [A + C(z-a_2)] \\ \frac{1}{\beta_z(g)} \left(1 - \frac{\beta_z^2(g)}{\delta_z(g)\gamma_z(g)}\right) &= (\pm) C \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

si bien que (4.10) s'écrit:

$$-W_2(g)(b'+b_c, b) = -W_2(g)(b', b \oplus [A + C(z-a_2)]b_c) \\ \oplus C \{ \oplus [A + C(z-a_2)]b_c^2 + 2b \cdot b_c \}$$

et l'état transformé devient alors, par construction de l'opérateur $\underline{S}_2(g)$:

$$(\underline{S}_2(g)\psi)(b) = e^{-i\alpha} \psi_{02}(b \oplus [A + C(z-a_2)]b_c) \\ \times e^{\frac{i}{\hbar} \{ \oplus C b_c \cdot b - \frac{1}{2} C b_c \cdot (C b_c z + (A - C a_2) b_c) \}} \quad (4.12)$$

Le centre de ce pinceau image suit donc l'une des droites:

$$b(z) = \oplus [A + C(z-a_2)]b_c \cong \tilde{b}_c(z)$$

alors que, géométriquement, selon (3.28):

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_c(a_2+0) \\ \dot{\tilde{b}}_c(a_2+0) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A \mathbb{1}_2 & B \mathbb{1}_2 \\ \hline C \mathbb{1}_2 & D \mathbb{1}_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A b_c \\ C b_c \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \dot{\tilde{b}}_c(z) = \oplus [A + C(z-a_2)]b_c$$

ce qui impose le choix de signe dans (4.7).

Remarque:

Dans (4.12), si l'on pose $\vec{U} = C b_c$ et $b_0 = (A - C a_2) b_c$, on obtient (au facteur $e^{-i\alpha}$ près, d'ailleurs sans importance) la transformation "de Galilée" (1.22).

Cela conduit à poser, pour un pinceau oblique quelconque (et même gauche, si $\vec{b}_0$ et $\vec{U}$ ne sont pas colinéaires):

$$\psi_r(b) = \frac{1}{\omega_0} \frac{q_0}{q(z)} e^{\frac{i}{2\hbar} \frac{1}{q(z)} (b - \vec{U}z - b_0)^2} e^{\frac{i}{2\hbar} \vec{U} \cdot (2b - \vec{U}z - b_0)} \quad (4.13)$$

C'est bien sûr une solution de (1.8), vu la remarque ci-dessus et (1.8)'.

On vérifie sans difficulté qu'un tel pinceau se transforme bien en accord avec l'optique des rayons (3.28): posons $\tilde{t}_c(z) = \tilde{t}_0 + \tilde{U}z$. A l'aide de (4.7) et (4.11), on peut écrire l'image de ψ_z par $\underline{S}_z(g)$ sous la forme:

$$\left(\underline{S}_z(g) \psi_z \right)(t) = \frac{e^{-i\alpha}}{\omega_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}(z)} e^{\frac{i}{2z} \frac{(\tilde{t} - \tilde{t}_c(z))^2}{\tilde{q}(z)}} e^{\frac{i}{2z} \tilde{U} \cdot (2\tilde{t} - \tilde{t}_c(z))}$$

où $\tilde{q}(z) = \tilde{q}_0 + (z - \tilde{z}_0)$ et $\tilde{\omega}_0$ sont donnés par (3.42) et (3.5)

et où $\tilde{U} = C \tilde{t}_c(a_1) + D \tilde{U}$

$$\tilde{t}_c(z) = A \tilde{t}_c(a_1) + B \tilde{U} + \tilde{U}(z - a_2) = \tilde{t}_c(a_2) + \tilde{U}(z - a_2)$$

c'est-à-dire qu'on a effectivement:

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_c(a_2) \\ \tilde{U} = \tilde{t}_c'(a_2) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A \mathbb{1}_2 & B \mathbb{1}_2 \\ \hline C \mathbb{1}_2 & D \mathbb{1}_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{t}_c(a_1) \\ \tilde{U} = \tilde{t}_c'(a_1) \end{pmatrix}$$

Remarque:

Les pinceaux cessent bien sûr d'être collimatés au sens (2.22) dès que $\tilde{U}^2$ ou $\tilde{t}^2$ n'est plus très petit.

La fonction $\tilde{\Phi}$ définie par

$$\tilde{\Phi}(\tilde{t}, z) = e^{\frac{i}{2}z} \psi(\tilde{t}, z) \quad (\text{voir (1.7)})$$

n'est plus alors une solution de l'équation de Helmholtz! Il est toutefois remarquable que les solutions de (1.8) de ce type, bien que ne satisfaisant pas l'équation de l'optique scalaire (H), reproduisent parfaitement les lois de l'optique géométrique dans le cadre des systèmes optiques linéaires.

4.3 $\underline{S}_2$ est une représentation projective de $SL(2, \mathbb{R})$.

On a pu voir, à la fin du paragraphe (3.7) (formule (3.49)), que la structure de groupe construite sur les systèmes optiques linéaires ($SL(2, \mathbb{R})$) en induisait une dans l'ensemble Perm H des permutations du demi-plan supérieur des paramètres (z_0, q_0) , et par là se transportait dans celui des opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}^2)$. On va vérifier qu'il s'agit ici d'une représentation linéaire projective de $SL(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire calculer le noyau intégral de $\underline{S}_2(a) \underline{S}_2(c)$; $a \triangleq [t_a, a_1, a_2]$; $c \triangleq [t_c, c_1, c_2]$

Ce noyau s'écrit :

$$K_2(b, b') = N_2(a) N_2(c) \int d^2 b'' e^{-\frac{i}{2} (W_2(a)(b'', b) + W_2(c)(b', b''))} \quad (4.14)$$

Cette intégrale se calcule de manière analogue à (4.4)-(4.6), mais le coefficient de b''^2 est ici réel ce qui fournit une phase supplémentaire (voir (GR 80) p.717 no 6.631.6 au lieu de 6.631.4). Compte tenu des expressions pour W_2 et N_2 ((4.3) et (4.8)), il vient, après quelques calculs :

$$\begin{aligned} K_2(b, b') = & \frac{-i}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\beta_2(a)\beta_2(c)} \frac{1}{\frac{1}{\gamma_2(a)} + \frac{1}{\delta_2(c)}} e^{i\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\gamma_2(a)} + \frac{1}{\delta_2(c)}\right)} \\ & \times \exp \frac{i}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left(\frac{1}{\delta_2(a)} - \frac{1}{\beta_2^2(a) \left(\frac{1}{\gamma_2(a)} + \frac{1}{\delta_2(c)} \right)} \right) b^2 \right. \\ & \left. - \frac{2b \cdot b'}{\beta_2(a)\beta_2(c) \left(\frac{1}{\gamma_2(a)} + \frac{1}{\delta_2(c)} \right)} + \left(\frac{1}{\gamma_2(c)} - \frac{1}{\beta_2^2(c) \left(\frac{1}{\gamma_2(a)} + \frac{1}{\delta_2(c)} \right)} \right) b'^2 \right\} \end{aligned}$$

Un long calcul permet d'identifier, à l'aide de (4.7), les coefficients de l'exponentielle, de b^2 , de $b \cdot b'$ et de b'^2 :

$$\begin{aligned} K_2(b, b') = & \frac{i}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\beta_2(ac)} e^{-\frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn} \frac{\beta_2(a)\beta_2(c)}{\beta_2(ac)}} e^{\frac{i}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{b^2}{\delta_2(ac)} + 2 \frac{b \cdot b'}{\beta_2(ac)} + \frac{b'^2}{\gamma_2(ac)} \right)} \\ = & N_2(ac) e^{-\frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn} \frac{\beta_2(a)\beta_2(c)}{\beta_2(ac)}} e^{-\frac{i}{2\pi^{\frac{1}{2}}} W_2(ac)(b', b)} \end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned} \underline{S}_z(a) \underline{S}_z(c) &= \varepsilon_z(a, c) \underline{S}_z(ac) \\ \text{ou} \quad \varepsilon_z(a, c) &= e^{-\frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn} \frac{\beta_z(a) \beta_z(c)}{\beta_z(ac)}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\underline{S}_z$ est bien une représentation projective de $SL(2, \mathbb{R})$, pour tout z tel que $\underline{S}_z(a)$, $\underline{S}_z(c)$ et $\underline{S}_z(ac)$ existent.

4.4 Transformations particulières.

Modifions tout d'abord l'opérateur "de diffusion" $\underline{S}_z(g)$ de manière à appliquer ψ_{z_1} sur $\tilde{\psi}_{z_2}$. On a (4.1):

$$e^{-i\alpha} \tilde{\psi}_{z_2} = \underline{S}_{z_1}(g) \psi_{z_1}, \quad g = [t, a_1, a_2], \quad t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

L'opérateur $\underline{S}_{z_1}(g)$ donne la "nouvelle" fonction $\tilde{\psi}$ au même point z_1 que la fonction ψ , mais on peut introduire une translation en z :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{z_2} &= \underline{S}_{z_1}(\ell_{12}) \tilde{\psi}_{z_1} \\ \text{ou} \quad \ell_{12} &= [1_{z_1}, z_1, z_2] \stackrel{(2.45)'}{=} [\ell(z_2 - z_1), 0, 0] \end{aligned} \quad (4.16)$$

(la valeur de $\tilde{\psi}$ en z_2 est la valeur en z_1 de la translatée de $\tilde{\psi}$)

Ainsi:

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha} \tilde{\psi}_{z_2} &= \underline{S}_{z_1}(\ell_{12}) \underline{S}_{z_1}(g) \psi_{z_1} \\ &\stackrel{(4.15)}{=} \varepsilon_z(\ell_{12}, g) \underline{S}_{z_1}(g_{12}) \psi_{z_1}, \quad g_{12} \triangleq \ell_{12} g \end{aligned} \quad (4.17)$$

On a:

$$\begin{aligned}
 g_{12} &= l_{12} g \stackrel{(4.16)}{=} [l(z_2 - z_1), 0, 0] [t, a_1, a_2] \\
 &\stackrel{(3.43)'}{=} [l(z_2 - z_1) l(-a_2) t, a_1, 0] \\
 &\stackrel{(2.45)'}{=} [l(z_2 - z_1) t, a_1, a_2] \\
 &\stackrel{v}{=} [t_{12}, a_1, a_2]
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

où

$$t_{12} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + C(z_2 - z_1) & B + D(z_2 - z_1) \\ C & D \end{pmatrix}$$

L'opérateur $\underline{S}_z(g)$ est donc changé en l'opérateur $\underline{S}'_{z_1}(g_{12})$:

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{aligned} (\underline{S}'_{z_1}(g_{12}) \psi_{z_1})(t) &= N'_{z_1}(g_{12}) \int d^2b e^{-\frac{i}{\hbar} W_{z_1}(g_{12})(b, t)} \psi_{z_1}(b) \\ \text{où } N'_{z_1}(g_{12}) &\stackrel{(4.17)}{=} \mathcal{E}_{z_1}(l_{12}, g) N_{z_1}(g_{12}) \end{aligned} \right. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

et les paramètres de cette transformation sont donnés d'après (4.7) et (4.18):

$$\begin{aligned}
 \delta_{z_1}(g_{12}) &= z_2 - a_2 + \frac{B - A(z_1 - a_1)}{D - C(z_1 - a_1)} \\
 \gamma_{z_1}(g_{12}) &= -(z_1 - a_1) + \frac{B + D(z_2 - a_2)}{A + C(z_2 - a_2)} \\
 \beta_{z_1}(g_{12}) &= C(z_1 - a_1)(z_2 - a_2) + A(z_1 - a_1) - D(z_2 - a_2) - B
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ce nouvel opérateur se voit affublé d'un facteur $\pm i$, le signe dépendant de z_1 et z_2 . Explicitement, par (4.15), (4.7) et (4.20), on calcule:

$$\mathcal{E}_{z_1}(l_{12}, g) = i \operatorname{sgn} \left\{ (z_2 - z_1) \frac{C(z_1 - a_1)(z_2 - a_2) + A(z_1 - a_1) - D(z_2 - a_2) - B}{C(z_1 - a_1)(z_2 - a_2) + A(z_1 - a_1) - D(z_2 - a_2) - B} \right\} \tag{4.21}$$

6.4.1 Transformée de Fourier, foyers.

On peut se demander s'il existe un couple de nombres (f_1, f_2) tel que ψ_{f_1} et $\tilde{\psi}_{f_2}$ soient en relation de transformée de Fourier (éventuellement à un facteur près). Il suffit pour cela, dans (4.19), que

$$W_{2,1}(g_{12})(b', b) = - \frac{2\pi \cdot b'}{\beta_{f_1}(g_{12})}, \text{ c'est-à-dire que:}$$

$$\frac{1}{\delta_{f_1}(g_{12})} = \frac{1}{\gamma_{f_1}(g_{12})} = 0 \quad (4.22)$$

ce qui s'écrit, vu (4.20):

$$D - C(f_1 - a_1) = 0 \quad (\Rightarrow B - A(f_1 - a_1) \neq 0 \text{ puisque } \det t = 0)$$

$$A + C(f_2 - a_2) = 0 \quad (\Rightarrow B + D(f_2 - a_2) \neq 0 \quad " \quad " \quad)$$

Le couple cherché est unique:

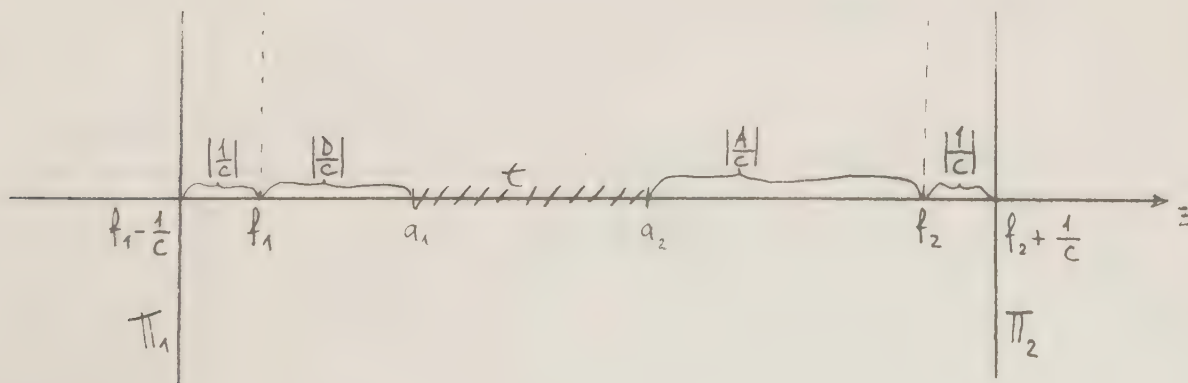
$$f_1 - a_1 = \frac{D}{C} \quad ; \quad f_2 - a_2 = -\frac{A}{C} \quad (4.23)$$

Exemple d'une lentille mince de focale f :

$$t \stackrel{(3.33)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 = -f \quad f_2 = f$$

Les foyers f_1 et f_2 définissent les plans principaux (KL 66), (BW 59) Π_1 et Π_2 du système optique linéaire; en effet, ces derniers sont donnés par (KL 66):

$$z_1 - a_1 = \frac{D - 1}{C} \quad ; \quad z_2 - a_2 = \frac{1 - A}{C}$$



De façon générale, on trouvera au foyer $f_2 = a_2 - \frac{A}{c}$, ($\frac{1}{\gamma_{2,12}} = 0$), la transformée de Fourier d'une section (dilatée) du faisceau incident (z_1 fixé), multipliée par une fonction (de $\vec{b}$) de module 1. En effet si $\frac{1}{\gamma_{2,12}} = 0$, alors $z_2 = f_2$ indépendamment de z_1 et:

$$\tilde{\psi}_{f_2}(\vec{b}) = i e^{-i\alpha} \varepsilon_{z_1}(l_{12}, a_1) e^{\frac{i}{2\pi} \frac{\vec{b}^2}{\delta_{2,12}}} \frac{1}{2\pi\lambda} \int d^2\vec{b}' e^{\frac{i}{\pi} \frac{\vec{b} \cdot \vec{b}'}{\beta_{2,12}}} \psi_{z_1}(\vec{b}')$$

Mais si $\frac{1}{\gamma_{2,12}} = 0$ alors $\beta_{2,12} \stackrel{(4.20)}{=} \frac{A}{c} - B = \frac{1}{c}$ car $\det t = 1$ et la dilatation est donc indépendante de z_1 .

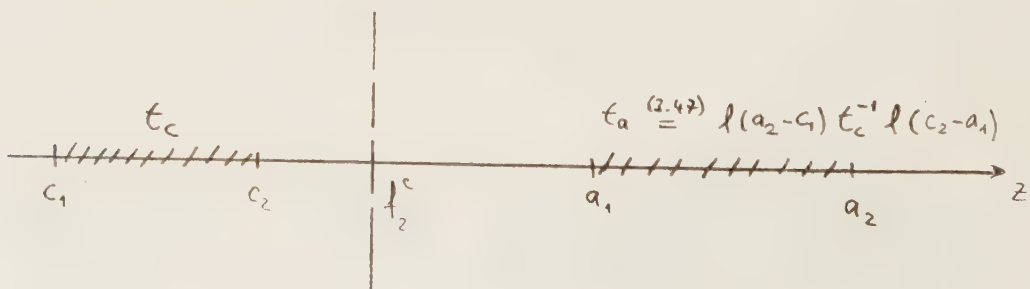
De plus: $\delta_{2,12} \stackrel{(4.20)}{=} \frac{-\frac{1}{c}}{D - c(z_1 - a_1)} \Rightarrow \frac{1}{\delta_{2,12}} \stackrel{(4.23)}{=} c^2 (z_1 - f_1)$

Ainsi, pour $z_2 = f_2$, z_1 quelconque:

$$\tilde{\psi}_{f_2}(\vec{b}) = \frac{i e^{i\alpha} c}{2\pi\lambda} \varepsilon_{z_1}(l_{12}, g) e^{\frac{i}{2\pi} c^2 (z_1 - f_1) \vec{b}^2} \int d^2\vec{b}' e^{\frac{i}{\pi} c \vec{b} \cdot \vec{b}'} \psi_{z_1}(\vec{b}') \quad (4.24)$$

A une phase locale près (qui devient une constante arbitraire si $z_1 = f_1$), $\tilde{\psi}_{f_2}$ est une transformée de Fourier en $\frac{c}{2\pi\lambda} \vec{b}$ de ψ_{z_1} .

Il existe donc des systèmes optiques linéaires qui permettent, pour un état donné, de passer de sa représentation en position ($\vec{b}$) à sa représentation en "impulsion" ($\vec{p}$). On retrouve ici l'analogie avec la mécanique quantique abordée au chapitre 2, et la possibilité d'imaginer des "filtres en impulsion" (paragraphe 2.6). Un tel filtre sera schématiquement constitué de deux systèmes optiques inverses l'un de l'autre (au sens de (3.47)) et d'un diaphragme (si on néglige la diffraction) au foyer f_2^c du premier système:



6.4.2 Image.

Si la section d'un faisceau en z_2 est l'image, par un système optique linéaire, de la section du faisceau incident en z_1 , la transformation $\mathcal{G}_{21}$ correspond à une homothétie dans l'espace $\{\mathbf{b}\}$ qui doit se traduire par une singularité du noyau intégral $K_{21}(q_{12})$ ("fonction δ ").

Cherchons donc les couples (z_1, z_2) pour lesquels:

$$\gamma_{21}(q_{12}) = 0 \quad \text{ou} \quad \beta_{21}(q_{12}) = 0$$

Mais: $\gamma_{21}(q_{12}) = 0 \iff C(z_1 - a_1)(z_2 - a_2) + A(z_1 - a_1) - D(z_2 - a_2) - B = 0$

implique que

$$z_2 - a_2 = \frac{B - A(z_1 - a_1)}{D - C(z_1 - a_1)} \quad \text{et} \quad z_1 - a_1 = \frac{B + D(z_2 - a_2)}{A + C(z_2 - a_2)} \quad (4.25)$$

c'est-à-dire, vu (4.20): $\gamma_{21}(q_{12}) = \delta_{21}(q_{12}) = 0$

En utilisant la définition (4.23) des foyers, on peut écrire la relation "image" (4.25) sous une forme bien connue:

$$(z_1 - f_1)(z_2 - f_2) = -\frac{1}{C^2} \quad (4.26)$$

C'est la forme de Newton de la loi des lentilles (BW 59), si l'on pose

$$f_2 = -f_1 = -\frac{1}{C} = f$$

Essayons maintenant d'établir une relation image précise pour les ondes elles-mêmes.

Pour cela, notons t_{22} la matrice (4.18) où l'on remplace z_1 par z , et soient z_1 et z_2 en relation image (4.26).

Il s'agit donc de regarder la limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{i}{2\pi\lambda |\beta_z(q_{22})|} e^{-\frac{i}{2\lambda} W_z(q_{22})(\mathbf{b}', \mathbf{b})}$$

au sens distribution, z_1 et z_2 étant liés par la relation image (4.26),

$W_z(g_{22})$ et $\frac{1}{\beta_z(g_{22})}$ ayant par conséquent un pôle simple en $z = z_1$.

Le remplacement de $\beta_z(g_{22})$ par son module vient du fait que justement, $\xi_z(l_{22}, g)$ change de signe en $z = z_1$ puisque $\beta_z(g_{22})$ s'y annule (voir (4.15)).

La méthode de la phase stationnaire^(HA 80) donne:

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{1}{\beta_z(g_{22})} \chi_z \right) (t) = \frac{i}{2\pi\lambda} \lim_{z \rightarrow z_1} \left\{ \frac{1}{|\beta_z(g_{22})|} e^{-\frac{i}{2\lambda} W_z(g_{22})(t'_c(z), t)} \chi_z(t'_c(z)) \right. \\ \left. \times \int d^2 b' e^{-\frac{i}{4\lambda} t' \cdot [(\vec{\nabla}_b \otimes \vec{\nabla}_b, W_z(g_{22}))(t'_c(z), t)] t'} \right\} \quad (4.27)$$

$$\text{où } t'_c(z) \text{ est tel que } (\vec{\nabla}_b, W_z(g_{22}))(t'_c(z), t) = 0 \quad (t'_c \text{ critique}) \quad (4.28)$$

$$\text{c'est-à-dire, par (4.3): } t'_c(z) = -\frac{\gamma_z(g_{22})}{\beta_z(g_{22})} t$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Remarquons que } \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{\gamma_z(g_{22})}{\beta_z(g_{22})} \right) \text{ existe, vu (4.20),} \\ \text{et vaut } -\frac{1}{A+C(z_2-a_2)} \stackrel{(4.23)}{=} -\frac{1}{C(z_2-t_2)} \stackrel{(4.26)}{=} C(z_1-t_1) \end{array} \right. \quad (4.29)$$

$$\text{donc } \lim_{z \rightarrow z_1} W_z(g_{22})(t'_c(z), t) \stackrel{(4.3)}{=} \stackrel{(4.28)}{=} -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{1}{\delta_z(g_{22})} - \frac{\gamma_z(g_{22})}{\beta_z^2(g_{22})} \right) t^2$$

$$\stackrel{(4.11)}{=} \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_1} C \frac{\gamma_z(g_{22})}{\beta_z(g_{22})}$$

$$\stackrel{(4.29)}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{z_2-t_2} \quad (4.30)$$

D'autre part: $\vec{\nabla}_t \otimes \vec{\nabla}_t W_z(g_{22}) \stackrel{(4.3)}{=} - \frac{2}{Y_z(g_{22})}$, ce qui donne lieu à une intégrale de Fresnel ((AS 70) p. 301) qu'on trouve être égale à $2i\pi \sqrt{Y_z(g_{22})}$.

Au total, la limite (4.27) existe et vaut, vu (4.28), (4.29) et (4.30):

$$\lim_{t \rightarrow z_1} \left(\underline{\hat{S}}_{c,1}(g_{22}) \chi_{z_1} \right) (t) = \frac{\pm 1}{C(z_2 - t_2)} e^{\frac{i}{2} \frac{t^2}{z_2 - t_2}} \chi_{z_1} \left(\frac{t}{C(z_2 - t_2)} \right) \quad (4.31)$$

Le facteur d'homothétie $C(z_2 - t_2)$ est effectivement celui de l'optique géométrique. En effet, si l'on considère le système linéaire $[\hat{t}, a_1, a_2]$ entre z_1 et z_2 plutôt qu'entre a_1 et a_2 , on écrit:

$$[\hat{t}, a_1, a_2] = [\hat{t}, z_1, z_2] \quad \text{où} \quad \hat{t} \stackrel{(3.45)'}{=} l(z_2 - a_2) + l(a_1 - z_1)$$

c'est-à-dire:

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} A + C(z_2 - a_2) & -C(z_1 - a_1)(z_2 - a_2) \\ -A(z_1 - a_1) + D(z_2 - a_2) + B & D - C(z_1 - a_1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

On aura reconnu, en regardant (4.20):

$$\delta_{z_1}(g_{12}) = \frac{\hat{B}}{\hat{D}} \quad ; \quad Y_{z_1}(g_{12}) = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} \quad ; \quad \beta_{z_1}(a_{12}) = -\hat{B} \quad (4.33)$$

D'autre part, en fonction des foyers f_1 et f_2 , (4.32) se lit, avec les définitions (4.23):

$$\hat{t} = C \begin{pmatrix} z_2 - f_2 & -(z_1 - f_1)(z_2 - f_2) - \frac{1}{c^2} \\ 1 & -(z_1 - f_1) \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

ce qui fait que pour z_1 et z_2 liés par (4.26), on trouve

$$\hat{t} = \hat{t}^* = C \begin{pmatrix} z_2 - f_2 & 0 \\ 1 & -(z_1 - f_1) \end{pmatrix}$$

et le facteur d'homothétie est bien $C(z_2 - f_2)$

Signalons au passage l'importance de ce concept d'image pour la mesure et la reproduction d'un faisceau.

Soit un faisceau de lumière monochromatique décrit par deux ondes ψ et $\tilde{\psi}$ de "part et d'autre" d'un système optique linéaire. La mesure d'un état ψ_{z_1} peut se faire à l'aide d'une plaque photosensible placée en z_1 : ce détecteur n'enregistrera toutefois que l'intensité de l'onde, soit $|\psi_{z_1}|^2$. (L'analogie quantique serait une mesure sur un grand nombre de particules, toutes préparées dans le même état ψ_{z_1}).

Imaginons que, sur la base de cette information partielle, on construise un nouvel état ψ'_{z_1} tel que $|\psi'_{z_1}|^2 = |\psi_{z_1}|^2$, c'est-à-dire:

$$\psi'_{z_1}(b) = e^{i\varphi(b)} \psi_{z_1}(b), \quad \varphi \text{ arbitraire.}$$

Que peut-on dire d'une mesure $|\tilde{\psi}'_{z_2}|^2$, en un z_2 quelconque?
 $\tilde{\psi}'_{z_2}$ et $\tilde{\psi}_{z_2}$ sont liés à ψ_{z_1} et ψ'_{z_1} par un noyau intégral $K \neq 0$ (formule (4.19)):

$$\tilde{\psi}_{z_2}(b) = \int d^2b' K(b, b') \psi_{z_1}(b')$$

$$\tilde{\psi}'_{z_2}(b) = \int d^2b' K(b, b') e^{i\varphi(b')} \psi_{z_1}(b')$$

Imposer $|\tilde{\psi}'_{z_2}|^2 = |\tilde{\psi}_{z_2}|^2$ pour tout ψ_{z_1} de $L^2(\mathbb{R}^2)$ revient à écrire que:

$$\forall \varphi, \exists \theta \quad K(b, b') e^{i\varphi(b')} = K(b, b') e^{i\theta(b)}$$

Cette identité implique que b et b' doivent être liés, et donc que le noyau K doit contenir en facteur une "fonction δ " ce qui signifie, vu ce qui précède, que z_1 et z_2 doivent être en relation image.

On ne peut par conséquent dire, sur la base d'une nouvelle mesure $|\tilde{\psi}'_{z_2}|^2$, le résultat qu'aurait fourni la mesure $|\tilde{\psi}_{z_2}|^2$ du faisceau original, que si z_1 et z_2 sont liés par (4.26).

Donc la reproduction, ne serait-ce que de l'intensité $|\tilde{\psi}_z|^2$, d'un faisceau est impossible sur la seule base d'une mesure $|\psi_{z_1}|^2$, sauf pour $z = z_2$ image de z_1 . Les ensembles de plans $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ images l'un de l'autre (la relation image est transitive!) présentent donc une forme de stabilité (au sens ci-dessus) par rapport au processus de mesure.

4.5 Fonctions génératrices.

Il se peut qu'une transformation canonique T :

$$\begin{aligned} T : E' &\longrightarrow E & (E \simeq E' \simeq \mathbb{R}^{2(d-1)}) \\ \begin{pmatrix} \vec{p}' \\ \vec{q}' \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit donnée globalement par une fonction génératrice^(AH 80) :

$$\begin{aligned} W : (\vec{b}', \vec{b}) &\longmapsto W(\vec{b}', \vec{b}) \\ \vec{p} &= - \frac{\partial W}{\partial \vec{b}} & \vec{p}' &= \frac{\partial W}{\partial \vec{b}'} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\text{et } \det \frac{\partial^2 W}{\partial \vec{b} \partial \vec{b}'} \neq 0 \text{ partout.} \quad (4.36)$$

Si tel est le cas, on peut construire^(AH 82) une approximation de l'opérateur unitaire $\underline{S}$ associé à la transformation canonique des opérateurs $\begin{pmatrix} \vec{B}' \\ \vec{P}' \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \underline{S} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \underline{\vec{B}} &= \underline{S} \vec{B}' \underline{S}^{-1} \text{ et } \underline{\vec{P}} = \underline{S} \vec{P}' \underline{S}^{-1} \\ \text{si } \begin{pmatrix} \underline{\vec{B}} \\ \underline{\vec{P}} \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} \vec{B}' \\ \vec{P}' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Cette approximation est donnée, à l'ordre le plus bas en $\hbar$, par la formule canonique de Van Vleck (voir (AH 82)) :

$$\langle \vec{b} | \underline{S} | \vec{b}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d-1}{2}}} \left| \det \frac{\partial^2 W}{\partial \vec{b}' \partial \vec{b}} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} W(\vec{b}', \vec{b})} \quad (4.38)$$

(notation de Dirac)

Si T est linéaire, cette formule est alors exacte.

Or, pour notre optique à trois dimensions des systèmes linéaires de symétrie cylindrique, la fonction génératrice W de la transformation canonique donnée par $\hat{T}$ ((4.32) ou (4.34)) est justement $W_{2,1}(g_{12})$, vu (4.33), et donc (4.38) est, à une phase près, le noyau intégral de notre opérateur $\underline{S}'_{2,1}(g_{12})$:

$$\left| \begin{aligned} \langle \hat{t} | \underline{S}'_{2,1}(g_{12}) | \hat{t}' \rangle &\sim \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \det \frac{\partial^2 W_{2,1}(g_{12})}{\partial \hat{t}' \partial \hat{t}} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} W_{2,1}(g_{12})(\hat{t}', \hat{t})} \\ \text{où } W_{2,1}(g_{12})(\hat{t}', \hat{t}) &= -\frac{1}{2\hat{B}} (\hat{A} \hat{t}'^2 - 2\hat{t} \cdot \hat{t}' + \hat{D} \hat{t}^2) \end{aligned} \right. \quad (4.39)$$

On peut exhiber d'autres représentations du même opérateur $\underline{S}'_{2,1}(g_{12})$ à l'aide d'autres fonctions génératrices de la même transformation canonique $\hat{T}$, obtenues par transformation de Legendre de $W_{2,1}(g_{12})$:

$$\left| \begin{aligned} \langle \vec{p} | \underline{S}'_{2,1}(g_{12}) | \hat{t}' \rangle &\sim \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \det \frac{\partial^2 S_{2,1}(g_{12})}{\partial \hat{t}' \partial \vec{p}} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} S_{2,1}(g_{12})(\hat{t}', \vec{p})} \\ \text{où } S_{2,1}(g_{12})(\hat{t}', \vec{p}) &= \frac{1}{2\hat{D}} (-\hat{C} \hat{t}'^2 + 2\hat{t}' \cdot \vec{p} + \hat{B} \vec{p}^2) \\ \text{et } \frac{\partial S_{2,1}(g_{12})}{\partial \hat{t}'} &= \vec{p}' \quad ; \quad \frac{\partial S_{2,1}(g_{12})}{\partial \vec{p}} = \hat{t} \end{aligned} \right. \quad (4.40)$$

$$\left| \begin{aligned} \langle \hat{t} | \underline{S}'_{2,1}(g_{12}) | \vec{p}' \rangle &\sim \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \det \frac{\partial^2 F_{2,1}(g_{12})}{\partial \vec{p}' \partial \hat{t}} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} F_{2,1}(g_{12})(\vec{p}', \hat{t})} \\ \text{où } F_{2,1}(g_{12})(\vec{p}', \hat{t}) &= \frac{1}{2\hat{A}} (\hat{B} \vec{p}'^2 - 2\vec{p}' \cdot \hat{t} + \hat{C} \hat{t}^2) \\ \text{et } \frac{\partial F_{2,1}(g_{12})}{\partial \vec{p}'} &= -\hat{t}' \quad ; \quad \frac{\partial F_{2,1}(g_{12})}{\partial \hat{t}} = -\vec{p} \end{aligned} \right. \quad (4.41)$$

$$\langle \vec{p} | \underline{S}'_2(q_{12}) | \vec{p}' \rangle \propto \frac{1}{2\pi\hbar} \left| d_2 + \frac{\partial^2 G_2(q_{12})}{\partial \vec{p}' \partial \vec{p}} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} G_2(q_{12})(\vec{p}', \vec{p})}$$

$$\text{ou } G_2(q_{12})(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{1}{2\hat{A}} (\hat{D} \vec{p}'^2 - 2\vec{p}' \cdot \vec{p} + \hat{A} \vec{p}^2) \quad (4.42)$$

$$\text{et } \frac{\partial G_2(q_{12})}{\partial \vec{p}'} = -\vec{b}' \quad ; \quad \frac{\partial G_2(q_{12})}{\partial \vec{p}} = \vec{b}$$

Quelques points importants.

a) $G_2(q_{12})$ est défini pour tous z_1, z_2 ssi $C \neq 0$ (condition indépendante de z); le noyau correspondant semble donc particulièrement adapté à l'écriture de l'opérateur $\underline{S}'_2(q_{12})$.

b) $W_2(q_{12})$, comme on l'a déjà vu, diverge pour $\hat{B} = 0$, c'est-à-dire pour z_1 et z_2 définissant des plans images l'un de l'autre.

c) $S_2(q_{12})$ diverge pour $\hat{A} = 0$, c'est-à-dire pour z_1 définissant le plan focal "gauche" du système linéaire: $z - q_1 = \frac{D}{C}$ (4.23).

d) $F_2(q_{12})$ diverge pour $\hat{D} = 0$, c'est-à-dire pour z_2 définissant le plan focal "droit": $z_2 - q_2 = -\frac{A}{C}$ (4.23).

e) En notation de Dirac:

$$\langle \vec{b} | \tilde{\Psi}_{z_2} \rangle = e^{i\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{p}' \langle \vec{b} | \underline{S}'_2(q_{12}) | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \Psi_{z_1} \rangle$$

$$\stackrel{(4.41)}{\propto} \frac{1}{2\pi\hbar|\hat{A}|} \int d^2 \vec{p}' e^{-\frac{i}{\hbar} F_2(q_{12})(\vec{p}', \vec{b})} \langle \vec{p}' | \Psi_{z_1} \rangle$$

Pour z_1 et z_2 en relation image: $\hat{B} = 0$ et

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{b} | \tilde{\psi}_{z_2} \rangle &\stackrel{(4.41)}{=} \frac{1}{2\pi\hat{A}} e^{-\frac{i}{2\hat{A}} \frac{C}{\hat{A}} \vec{b}^2} \int d^2\vec{p}' e^{\frac{i}{\hat{A}} \vec{p}' \cdot \frac{\vec{b}}{\hat{A}}} \langle \vec{p}' | \psi_{z_1} \rangle \\
 &= \frac{1}{|\hat{A}|} e^{-\frac{i}{2\hat{A}} \frac{C}{\hat{A}} \vec{b}^2} \int d^2\vec{p}' \langle \frac{\vec{b}}{\hat{A}} | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \psi_{z_1} \rangle \\
 &= \frac{1}{|\hat{A}|} e^{-\frac{i}{2\hat{A}} \frac{C}{\hat{A}} \vec{b}^2} \langle \frac{\vec{b}}{\hat{A}} | \psi_{z_1} \rangle
 \end{aligned}$$

On a retrouvé de façon particulièrement simple le résultat (4.31).

Les sauts de phase aux plans focaux et aux plans images.

Le noyau intégral $\langle \vec{b} | \underline{S}'_2(z_1) | \vec{b}' \rangle$ (4.39) est singulier pour $\hat{B} = 0$, c'est-à-dire pour z_1 et z_2 liés par (4.26): notons $z_2 = I(z_1)$. Au voisinage de $z_2 = I(z_1)$, l'écriture de $\tilde{\psi}_{z_2}$ par (4.39) est donc inadaptée. On peut par contre y utiliser (4.41), $\hat{A}$ étant non nul au voisinage de $z_2 = I(z_1)$, si $|z_1 - a_1| < \infty$.

[En effet, $\hat{A} \stackrel{(4.32)}{=} A + C(z_2 - a_2) \stackrel{(4.25)}{=} \frac{1}{z_1 - a_1} (\hat{B} + D(z_2 - a_2))$ est non nul, $A + C(z_2 - a_2)$ et $\hat{B} + D(z_2 - a_2)$ ne s'annulant jamais en même temps puisque $\det t \neq 0$]

Au voisinage de $z_2 = I(z_1)$, $z_2 \neq I(z_1)$, on aura donc:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{b} | \tilde{\psi}_{z_2} \rangle &= \int d^2\vec{p}' \langle \vec{b} | \underline{S}'_2(z_1) | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \psi_{z_1} \rangle \\
 &\stackrel{(4.41)}{=} \frac{1}{2\pi\hat{A}} \frac{1}{|\hat{A}|} e^{-\frac{i}{2\hat{A}} \frac{C}{\hat{A}} \vec{b}^2} \int d^2\vec{p}' d^2\vec{b}' e^{-\frac{i}{\hat{A}} \left(\frac{\hat{B}}{2} \vec{p}'^2 + \vec{b} \cdot \vec{p}' \right)} \langle \vec{p}' | \vec{b}' \rangle \langle \vec{b}' | \psi_{z_1} \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hat{A})^2} \frac{1}{|\hat{A}|} e^{-\frac{i}{2\hat{A}} \frac{C}{\hat{A}} \vec{b}^2} \int d^2\vec{b}' \langle \vec{b}' | \psi_{z_1} \rangle \int d^2\vec{p}' e^{-\frac{i}{2\hat{A}} \left[\frac{\hat{B}}{\hat{A}} \vec{p}'^2 + \left(\vec{b}' - \frac{\vec{b}}{\hat{A}} \right) \cdot \vec{p}' \right]}
 \end{aligned}$$

Si on complète l'exposant de l'intégrand pour obtenir un carré parfait, il reste une intégrale de Fresnel ((AS 70) p.301) qui vaut $-2i\pi\lambda \frac{\hat{A}}{\hat{B}}$, l'exponentielle restante étant bien entendu $e^{-\frac{i}{2} W_{z_1}(q_{12})(b',b)}$; de sorte qu'on peut écrire, pour z_2 voisin mais différent de $I(z_1)$:

$$\tilde{\psi}_{z_2}(b) \approx \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{\hat{A}}{|\hat{A}|} \frac{1}{\hat{B}} \int d^2b' e^{-\frac{i}{2} W_{z_1}(q_{12})(b',b)} \psi_{z_1}(b')$$

$\frac{\hat{A}}{|\hat{A}|}$ est constant au voisinage de $z_2 = I(z_1)$ ($|z_2 - q_1| < \infty$), où $\hat{B}$ change de signe: il apparaît donc un saut de phase de π dans (4.39) en $z_2 = I(z_1)$, de façon naturelle, en fait, puisque cela revient à remplacer $\sqrt{\hat{B}^2}$ par $\hat{B}$. C'est ce même saut de phase qui apparaissait dans (4.31).

** Choisissons, pour $\langle b | S'_2(q_{12}) | b' \rangle$ le facteur $\frac{-i}{2\pi\lambda \hat{B}}$ (c'est le résultat (4.8)), et revenons au noyau (4.41):

$$\tilde{\psi}_{z_2}(b) = -\frac{i}{2\pi\lambda} \frac{1}{\hat{B}} e^{\frac{i}{2\lambda} \frac{\hat{A}}{\hat{B}} b^2} \int d^2p' \langle \bar{p}' | \psi_{z_1} \rangle \underbrace{\int d^2b' e^{\frac{i}{2\lambda} \left(\frac{\hat{A}}{\hat{B}} b'^2 - 2 \frac{b \cdot b'}{\hat{B}} + 2 \bar{p}' \cdot b' \right)}}_{2i\pi\lambda \frac{\hat{B}}{\hat{A}} e^{\frac{i}{2} (\dots)}}$$

L'exponentielle restante est bien sûr $e^{-\frac{i}{2} F_{z_1}(q_{12})(\bar{p}',b)}$, et on a trouvé:

$$\tilde{\psi}_{z_2}(b) = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{1}{\hat{A}} \int d^2p' e^{-\frac{i}{2} F_{z_1}(q_{12})(\bar{p}',b)} \langle \bar{p}' | \psi_{z_1} \rangle$$

On obtient le même saut de phase de π , bien connu des opticiens (BW 59), mais cette fois dans (4.41), et en z_2 tel que $\hat{A} = 0$, i.e $z_2 = I_2$, où (4.41) est singulier.

Selon le même principe, on calcule $\tilde{\psi}_{z_2}(b)$ à l'aide des noyaux (4.40) et (4.42), si bien qu'on peut réécrire les quatre représentations (4.39) à (4.42) de l'opérateur $S'_2(q_{12})$ avec les bonnes phases relatives, le choix ** étant posé pour la phase "absolue":

$$\begin{aligned}
 (W) \quad & \langle \underline{t} | \underline{S}'_{z_1}(g_{12}) | \underline{t}' \rangle = \frac{-i}{2\pi\lambda} \frac{1}{\hat{B}} e^{\frac{i}{2\lambda\hat{B}} (\hat{A} \underline{t}'^2 - 2 \underline{t}' \cdot \underline{t} + \hat{D} \underline{t}^2)} \\
 (S) \quad & \langle \underline{\tilde{p}} | \underline{S}'_{z_1}(g_{12}) | \underline{t}' \rangle = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{1}{\hat{D}} e^{\frac{i}{2\lambda\hat{D}} (\hat{C} \underline{t}'^2 - 2 \underline{t}' \cdot \underline{\tilde{p}} - \hat{B} \underline{\tilde{p}}^2)} \\
 (F) \quad & \langle \underline{t} | \underline{S}'_{z_1}(g_{12}) | \underline{\tilde{p}}' \rangle = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{1}{\hat{A}} e^{-\frac{i}{2\lambda\hat{A}} (\hat{B} \underline{\tilde{p}}'^2 - 2 \underline{\tilde{p}}' \cdot \underline{t} + \hat{C} \underline{t}^2)} \\
 (G) \quad & \langle \underline{\tilde{p}} | \underline{S}'_{z_1}(g_{12}) | \underline{\tilde{p}}' \rangle = \frac{-i}{2\pi\lambda} \frac{1}{\hat{C}} e^{-\frac{i}{2\lambda\hat{C}} (\hat{D} \underline{\tilde{p}}'^2 - 2 \underline{\tilde{p}}' \cdot \underline{\tilde{p}} + \hat{A} \underline{\tilde{p}}^2)}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}$ est donné par (4.32) ou (4.34). Notons que $\hat{C} = C$.

Enfin, justifions le terme "corrections de Fresnel" (GO 71) utilisé au paragraphe 3.2 pour qualifier la correction d'amplitude apportée par l'équation ("de Schrödinger") de l'optique ondulatoire collimatée à la solution donnée par l'optique géométrique (eikonale).

Pour un espace libre entre $a = z = 0$ et $a = z = z$, (4.32) donne:

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si bien que (W) s'écrit:}$$

$$\langle \underline{t} | \underline{S}'_{z_1}(g_{12}) | \underline{t}' \rangle = \frac{-i}{2\pi\lambda z} e^{\frac{i}{2\lambda z} (\underline{t} - \underline{t}')^2} \tag{4.44}$$

C'est exactement le noyau intégral de l'approximation de diffraction de Fresnel dans l'intégrale de diffraction de Kirchhoff-Sommerfeld (voir p. ex. (GD 68) ou (BW 59, pp 381-382)).

5. CONCLUSIONS.

Un des enjeux de ce travail était d'étudier le parallélisme frappant entre l'optique collimatée et la mécanique quantique, et d'en tirer parti pour illustrer ce que peut représenter l'évolution d'un état quantique d'une particule sans spin. On a montré que les limites de cette analogie sont à chercher dans les fondements conceptuels de la mécanique quantique mais que sur le plan strictement mathématique, le parallèle est défendable et qu'on peut établir une correspondance entre les interprétations des grandeurs dans les deux domaines (intensité-densité de probabilité, valeurs moyennes, relations d'incertitude...)

L'équation "de Schrödinger" (2.20) obtenue reste cependant plus difficile à traiter que l'équation usuelle $\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ où $H = \frac{\vec{F}^2}{2m} + V$ à cause du terme $\frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \vec{F}^2 \frac{1}{\mu}$. On peut envisager une hypothèse supplémentaire sur l'indice de réfraction pour pouvoir négliger dans ce terme la dépendance en $\vec{B}$ et z , et retrouver ainsi le problème usuel (hypothèse du type (3.25)-(3.26) par exemple). Une autre application de cette équation serait de considérer le cas stationnaire d'une fibre optique (KS 80). On peut se ramener dans ce cas au problème usuel mais avec un potentiel V non local (équation de Kisslinger (WI 73), (AH 79)). La transformation de A.M. Green (WI 73), (GR 62) permet de l'écrire comme une "équation de Schrödinger à potentiel effectif local dépendant de l'énergie". Une étude du cas stationnaire donnerait l'interprétation correspondante en optique collimatée de grandeurs comme l'énergie ou la probabilité de transition en mécanique quantique.

Relevons encore que le critère (2.22) ne s'applique qu'au test de collimation selon l'axe z : l'analogie avec la mécanique de Schrödinger est perdue lors d'une rotation (dans $\mathbb{R}^d$).

Quant à l'étude de la matrice $\underline{S}$ associée à un système optique linéaire (chapitre 4), on peut aisément la généraliser à un espace de dimension d quelconque^(AH 82): si la transformation canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^* \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \begin{pmatrix} \vec{b}' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad C = DB^{-1}A - \tilde{B}^{-1}$$

une fonction génératrice correspondante s'écrit:

$$W(\vec{b}', \vec{b}) = \frac{1}{2} \left(-\vec{b}' \cdot \tilde{B}^{-1} A \vec{b}' + 2 \vec{b}' \cdot \tilde{B}^{-1} \vec{b} - \vec{b} \cdot D \tilde{B}^{-1} \vec{b} \right)$$

C'est manifestement une généralisation de (4.43W), et les autres représentations (4.43S,F,G) s'en déduisent par transformation de Legendre.

D'autre part, ce formalisme des fonctions génératrices permet d'envisager le cas des systèmes optiques non linéaires (au sens où la transformation canonique T (3.24) n'est plus linéaire). S'il existe une fonction génératrice donnant T globalement, l'approximation du noyau intégral de $\underline{S}'$ ne comporte qu'une exponentielle. Par contre, si une fonction génératrice, par exemple W , ne donne T que localement, c'est-à-dire si $\det \frac{\partial^2 W}{\partial \vec{b}' \partial \vec{b}}$ s'annule, l'approximation est une somme d'exponentielles, les phases relatives étant liées à la structure de la variété lagrangienne définie par T ^(AH 82) selon les prescriptions de Maslov^(MF 81). Cette approximation est à rapprocher de la méthode semi-classique (somme sur les chemins classiques)^{(BM 72),(CR 80)} basée sur la formulation feynmanienne de la mécanique quantique. Cette méthode fait un large appel à la "phase stationnaire", ainsi qu'à la théorie des catastrophes au voisinage des caustiques^{(PS 78),(CR 80),(BE 80)}.

Appendice : METHODE DE FESHBACH ET VILLARS.

On appliquera ici à l'équation de Helmholtz une technique que Feshbach et Villars ont utilisée pour celle de Klein-Gordon en 1958 (FV 58). Cette méthode exacte fournit une équation vectorielle dont les composantes ont une forme semblable à (2.20), et qui se prête donc à une discussion sur la collimation.

A.1. Forme hamiltonienne de l'équation de Helmholtz.

Introduisons le champ $\vec{\phi} = -\frac{i\hbar}{n} \frac{\partial \phi}{\partial z}$ (A.1)

L'équation (H) pour ϕ s'écrit alors comme un système d'équations pour le couple $(\phi, \vec{\phi})$:

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial z} \\ \phi &= \Delta \phi - \frac{1}{2i\hbar} \frac{\partial}{\partial z} (n \vec{\phi}) + \frac{n^2}{2\hbar^2} \phi \\ &= \Delta \phi - \frac{\sqrt{n}}{2i\hbar} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{n} \vec{\phi}) - \frac{1}{2i\hbar} \frac{\partial n}{\partial z} \vec{\phi} + \frac{n^2}{2\hbar^2} \phi \end{aligned} \quad (A.2)$$

On peut rendre ce système plus symétrique en passant aux champs $\psi_{\pm}$ définis comme suit:

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{n}} (\psi_+ + \psi_-) & \psi_+ &= \frac{\sqrt{n}}{2} (\phi + \vec{\phi}) \\ \vec{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{n}} (\psi_+ - \psi_-) & \psi_- &= \frac{\sqrt{n}}{2} (\phi - \vec{\phi}) \end{aligned} \quad (A.3)$$

Regardons l'équation d'évolution pour les champs $\psi_{\pm}$:

$$\frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial z} \stackrel{(A.3)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{n} (\phi + \vec{\phi})) = \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{4\sqrt{n}} \frac{\partial n}{\partial z} \phi \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{n} \vec{\phi})$$

$$(A.2) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial z} \phi + \frac{1}{4\sqrt{n}} \frac{\partial n}{\partial z} \phi \pm \frac{i\pm}{2\sqrt{n}} \left(\Delta \phi - \frac{1}{2i\pm} \frac{\partial n}{\partial z} \phi + \frac{n^2}{2} \phi \right)$$

$$(A.3) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi_+ - \varphi_-) + \frac{1}{4n} \frac{\partial n}{\partial z} (\varphi_+ + \varphi_-) \\ \pm \frac{i\pm}{2\sqrt{n}} \left[\Delta \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi_+ + \varphi_-) \right) - \frac{1}{2i\pm} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial n}{\partial z} (\varphi_+ - \varphi_-) + \frac{n^2}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi_+ + \varphi_-) \right]$$

et en groupant les termes, on obtient:

$$i\pm \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi_+ + \varphi_-) \right) \mp n \varphi_{\pm} + \frac{i\pm}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_{\mp} \quad (A.4)$$

Avec $\vec{P} = \frac{i\pm}{i} \vec{\nabla}$, le système s'écrit:

$$\left| \begin{array}{l} i\pm \frac{\partial \varphi_+}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{P}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi_+ + \varphi_-) - n \varphi_+ + \frac{i\pm}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_- \\ i\pm \frac{\partial \varphi_-}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{P}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi_+ + \varphi_-) + n \varphi_- + \frac{i\pm}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_+ \end{array} \right. \quad (A.5\pm)$$

Formellement, on peut écrire (A.5 $\pm$) sous la forme d'une équation de Schrödinger:

$$\text{Notons } \psi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (A.6)$$

Pour toute matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, on notera:

$$\overline{M} = \widetilde{M}^*, \quad \widetilde{M} \text{ étant la } \underline{\text{transposée}} \text{ de } M \\ \text{et } M^* \text{ sa } \underline{\text{conjuguée complexe}}. \quad (A.7)$$

Donnons enfin les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

Avec ces notations, (A.5 $\pm$) s'écrit:

$$\left| i\pm \frac{\partial \psi}{\partial z} = \mathbb{H} \psi \right. \quad \text{où} \quad (A.9)$$

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{P}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} (\sigma_3 + i\sigma_2) - n \sigma_3 + \frac{i\pm}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \sigma_1$$

On peut munir l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ de la métrique indéfinie σ_3 ; le "produit scalaire" s'écrivant:

$$(\phi_2, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}b \, \overline{\phi_2}(b) \sigma_3 \psi_2(b) \quad (\text{A.10})$$

L'adjoint d'un opérateur est alors défini de façon usuelle:

$$(\phi_2^+, \psi_2) = (\phi_2, \sigma \psi_2) \quad \forall \phi_2, \psi_2$$

et (A.10) donne:

$$\sigma^+ = \overline{\sigma_3 \sigma \sigma_3^{-1}} = \sigma_3 \bar{\sigma} \sigma_3 \quad (\text{A.11})$$

Cette définition fait de $\mathbb{H}$ un opérateur symétrique: $\mathbb{H}^+ = \mathbb{H}$ en effet:

$$\bullet \sigma_3 (\sigma_3 + i\sigma_2) \sigma_3 = (\sigma_3)^2 - i\sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_3 + i\sigma_2$$

$$\bullet \sigma_3 \bar{\sigma}_3 \sigma_3 = (\sigma_3)^3 = \sigma_3$$

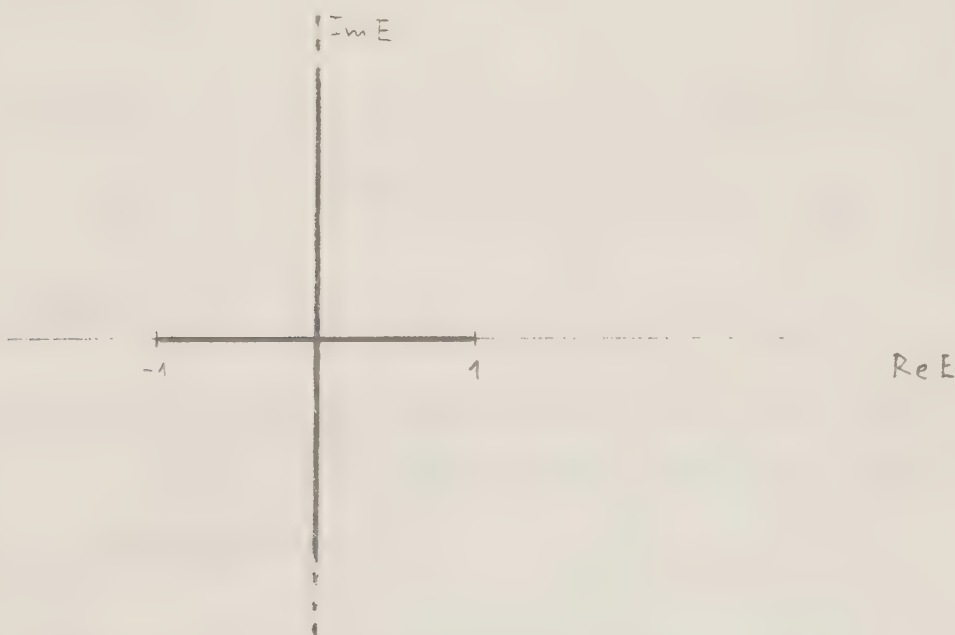
$$\bullet \sigma_3 \bar{\sigma}_1 \sigma_3 = -i\sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 = i\sigma_1$$

Regardons le spectre de $\mathbb{H}$ dans le cas $n=1$:

$$E \in \text{Sp } \mathbb{H} \stackrel{(\text{A.9})}{\iff} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p^2 - 1 - E & \frac{1}{2}p^2 \\ -\frac{1}{2}p^2 & -\frac{1}{2}p^2 + 1 - E \end{pmatrix} = 0, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\text{d'où} \quad E^2 + p^2 = 1$$

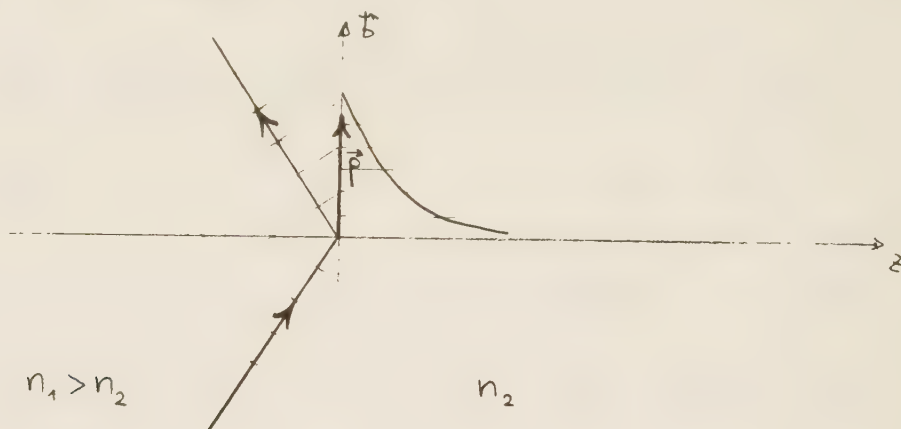
$$\text{c'est-à-dire} \quad \text{Sp } \mathbb{H} = [-1, 1] \cup i\mathbb{R}$$



Les ondes planes associées à ces valeurs spectrales sont:

$$\phi_2(b, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+E \\ 1-E \end{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\vec{p} \cdot \vec{b} + E z)}$$

Pour $E = i \operatorname{Im} E$, $\phi_{\vec{p}}$ est une onde se propageant selon $\vec{p}$ ($\perp \vec{e}_0$) et dont l'amplitude, si $\operatorname{Im} E > 0$, est amortie exponentiellement en z . Une telle onde peut se rencontrer dans le cas de la réflexion totale, dans le milieu le moins dense (onde évanescente^(BW 59)):



A.2. Equation de continuité.

Comme au paragraphe 2.3, on peut écrire une équation de continuité. La "densité" s'écrit à l'aide de σ_3 :

$$\int_{\phi} (t, z) = \int \sigma_3 \phi = |\phi_+|^2 - |\phi_-|^2 \quad (\text{A.12})$$

Reprenons l'exemple de l'onde plane solution de (H) libre:

$$\phi(t, z) = e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{t} + E z)} \quad , \quad \vec{p}^2 + E^2 = 1$$

par (A.1) : $\dot{\phi} = E \phi$ et (A.3) donne bien l'onde plane:

$$\phi_{\vec{p}}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+E}{1-E} \right) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{t} + E z)} \quad \text{et donc:}$$

$$\partial_{\phi_{\vec{p}}} = \frac{1}{4} (|1+E|^2 - |1-E|^2) e^{-\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} E} = \operatorname{Re} E e^{-\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} E} = \operatorname{Re} E$$

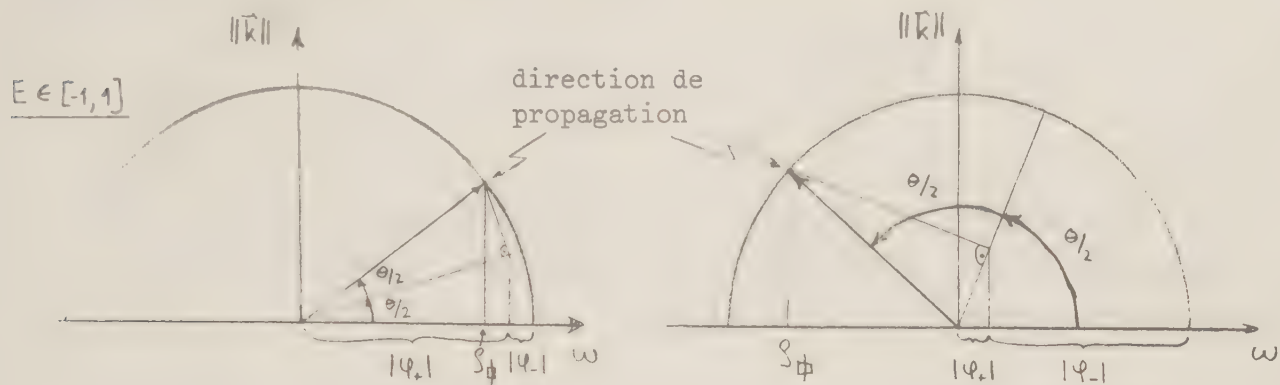
Si θ est l'angle (orienté) défini par l'axe z et la direction de propagation de cette onde plane (dans $\mathbb{R}^d$), alors:

$$\operatorname{Re} E = \cos \theta \quad , \quad \sqrt{\vec{p}^2 - (\operatorname{Im} E)^2} = |\sin \theta|$$

$$|\phi_+| = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} |\operatorname{Im} E| \quad , \quad |\phi_-| = \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} |\operatorname{Im} E|$$

et $\partial_{\phi} = \cos \theta$

$\mathcal{S}_\Phi$ donne donc l'intensité de lumière traversant un plan perpendiculaire à l'axe z , et le sens dans lequel cette lumière le traverse, $|\varphi_+|$ resp. $|\varphi_-|$ indiquant dans quelle mesure la direction de propagation est proche de $\vec{e}_0$ resp. $-\vec{e}_0$.



De même, on peut définir une "densité" de courant (champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{d-1}$, pour z fixé):

$$\vec{\mathcal{J}}_\Phi = \frac{\pm}{n} \operatorname{Im} \bar{\Phi} (1 + \sigma_1) \vec{\nabla} \Phi \quad \text{où} \quad \vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \varphi_+ \\ \vec{\nabla} \varphi_- \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

et "l'équation de Schrödinger" (A.9) donne, avec les définitions (A.12) et (A.13), l'équation de continuité:

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{J}}_\Phi + \frac{\partial \mathcal{S}_\Phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.14})$$

En fait, (A.12), (A.13) et (A.14) ne sont rien d'autre que les définitions et relation qu'on associe habituellement au champ Φ solution de (H): en effet, en fonction de Φ , on vérifie que

$$\mathcal{S}_\Phi = \pm \operatorname{Im} \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{\mathcal{J}}_\Phi = \pm \operatorname{Im} \Phi^* \vec{\nabla} \Phi$$

qu'on peut grouper en une d -densité de courant:

$$\vec{\mathcal{J}} = (\vec{\mathcal{J}}_\Phi, \mathcal{S}_\Phi) = \pm \operatorname{Im} \Phi^* \vec{\nabla}_x \Phi$$

(H) impliquant bien (A.14):

$$\vec{\nabla}_x \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0$$

Dans le cas de l'onde plane:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{\Phi_p} &= \frac{1}{4} \frac{1}{\hbar} \operatorname{Im} (1+E^*, 1-E^*) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+E \\ 1-E \end{pmatrix} \frac{i}{\hbar} \vec{p} e^{-\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} E z} \\ &= \vec{p} e^{-\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} E z} \end{aligned}$$

On voit apparaître la décroissance exponentielle dans le courant, pour $E = i \operatorname{Im} E$, $\operatorname{Im} E > 0$; il faut noter que dans ce cas, le courant est non nul alors que la "densité" S_{Φ_p} est nulle.

$\vec{S}_{\Phi}$ n'est pas positif ou nul: ce n'est pas une "vraie densité", mais on peut l'interpréter comme une différence de deux densités associées à deux flux d'énergie opposés. Une telle interprétation est bien sûr justifiée, comme on vient de le voir, pour les ondes planes dans le cas libre, mais de manière générale elle n'est pas tout à fait compatible avec celle de S_{χ} dans le cas des ondes collimatées (voir paragraphe 2.3), comme on le verra au paragraphe suivant.

D'autre part, on rappellera une autre conséquence importante de la non-positivité de la métrique : on ne peut pas déduire les relations de Heisenberg. C'est en effet l'existence d'un "vrai" produit scalaire qui permet de les obtenir (voir p. ex. (CT 73)).

A.3 Collimation et conjugaison.

La forme (A.5₊) de l'équation (H) est proche de l'équation collimatée (2.20): il suffirait de poser $\varphi_- = 0$ dans (A.5₊) pour trouver la forme (2.20) et $\varphi_+ = 0$ dans (A.5₋) pour trouver la forme (2.20) avec "renversement du temps", c'est-à-dire une équation pour le champ:

$$\chi_- = \sqrt{\hbar} \psi_- e^{-\frac{i}{\hbar} f}, \quad f \text{ donnée par (2.16)}$$

avec le critère de collimation (2.22b)

Cependant, poser $\varphi_- = 0$ signifie, en vertu de (A.1) et (A.3):

$$-\frac{i\lambda}{n} \frac{\partial \phi}{\partial z} \stackrel{(A.1)}{=} \phi \stackrel{(A.3)}{=} \phi$$

qui s'intègre immédiatement:

$$\phi_+(t, z) = \phi_{+0}(t) e^{\frac{i}{\lambda} f(t, z)} \quad (A.16)$$

(On aurait de même, pour $\varphi_+ = 0$:

$$\phi_-(t, z) = \phi_{-0}(t) e^{-\frac{i}{\lambda} f(t, z)} \quad)$$

(A.5-), pour $\varphi_- = 0$, se réduit à:

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{p}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_+ + \frac{i\lambda}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_- \quad (A.17)$$

et on vérifie sans peine que (A.17) est compatible avec (A.5+) en utilisant la forme (A.16), puisque $\varphi_+ = \sqrt{n} \phi$ pour $\varphi_- = 0$.

Mais (A.17) s'écrit, après quelques calculs:

$$-\lambda^2 \Delta \phi_0 - 2i\lambda \bar{\nabla} \phi_0 \cdot \bar{\nabla} f - \left(i\lambda \left(\Delta f + \frac{\partial n}{\partial z} \right) - (\bar{\nabla} f)^2 \right) \phi_0 = 0$$

et ne peut donc être satisfaite identiquement en z que si $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$
(dans ce cas en effet, (A.17) ne dépend plus de z).

Il n'est donc pas possible de négliger complètement l'effet de φ_-
(ou de φ_+) dans le cas où n dépend de z .

Relions maintenant φ_+ et φ_- à la factorisation (2.22a):

$$\begin{aligned} \phi^{(+)} &= e^{+\frac{i}{\lambda} f} \psi^{(+)} \Rightarrow \phi^{(+)} = \frac{\lambda}{in} e^{\frac{i}{\lambda} f} \left(\frac{i}{\lambda} n \psi^{(+)} + \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} \right) \\ &= \phi^{(+)} + \frac{\lambda}{in} e^{\frac{i}{\lambda} f} \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \varphi_+^{(+)} = \sqrt{n} \phi^{(+)} + \frac{\pm}{2i} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{i}{2}f} \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} \\ \varphi_-^{(+)} = - \frac{\pm}{2i} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{i}{2}f} \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{A.18}\pm)$$

De même, pour la factorisation $\phi^{(-)} = e^{-\frac{i}{2}f} \psi^{(-)}$, on aura :

$$\begin{cases} \varphi_+^{(-)} = \frac{\pm}{2i} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{i}{2}f} \frac{\partial \psi^{(-)}}{\partial z} \\ \varphi_-^{(-)} = \sqrt{n} \phi^{(-)} - \frac{\pm}{2i} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{i}{2}f} \frac{\partial \psi^{(-)}}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{A.19}\pm)$$

Il apparaît alors que négliger $\varphi_-^{(+)}$ ou $\varphi_+^{(-)}$ revient à imposer :

$$\pm \left| \frac{\partial \psi^{(\pm)}}{\partial z} \right| \ll n \left| \psi^{(\pm)} \right| \quad (\text{A.20})$$

De plus, on vérifie avec (A.18) et (A.19) que la "densité" $\mathcal{S}_\Phi$ (A.12) s'écrit :

$$\mathcal{S}_{\Phi^{(\pm)}} = \pm \left| \sqrt{n} \phi^{(\pm)} \right|^2 + \pm \operatorname{Im} \left(\psi^{(\pm)*} \frac{\partial \psi^{(\pm)}}{\partial z} \right) \quad (\text{A.21})$$

(A.20) impliquerait alors, avec (2.19) et (2.25), que

$$\mathcal{S}_{\Phi^{(\pm)}} \cong \pm \mathcal{S}_{\chi^{(\pm)}}$$

L'approximation (A.20) permettrait donc d'identifier les deux densités, le signe indiquant le sens de propagation de l'onde collimatée, et va dans le sens de l'interprétation de $\mathcal{S}_\Phi$ suggérée au paragraphe A.2, que n'autorise pas notre critère de collimation (2.22b).

Ecrivons le critère (2.22b) pour le champ $\varphi_-^{(+)}$; par (A.18-) on a :

$$\begin{aligned} i \pm \frac{\partial^2 \psi^{(+)}}{\partial z^2} &= 2\sqrt{n} \left(\frac{\partial \varphi_-^{(+)}}{\partial z} + \left(\frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{i}{2} n \right) \varphi_-^{(+)} \right) e^{-\frac{i}{2}f} \\ &= n \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} + \left(2\sqrt{n} \frac{\partial \varphi_-^{(+)}}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_-^{(+)} \right) e^{-\frac{i}{2}f} \end{aligned}$$

et donc $\left| \frac{\partial^2 \psi^{(+)}}{\partial z^2} \right| \ll n \left| \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} \right|$ s'écrit :

$$2\sqrt{n} \frac{\partial \varphi_-^{(+)}}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_-^{(+)} \approx -n \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} e^{+\frac{i}{2}f} \stackrel{(A.18-)}{=} -\frac{i}{2} n \sqrt{n} \varphi_-^{(+)}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial \varphi_-^{(+)}}{\partial z} - \left(\frac{i}{2} n - \frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \varphi_-^{(+)} \approx 0 \quad (A.22)$$

Remarquons que l'intégration de cette approximation ne donne rien d'autre que (A.18-) assorti de la condition (2.22b).

Reprenons maintenant l'équation (A.5+) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\varphi_+^{(+)} + \varphi_-^{(+)})}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{P}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi_+^{(+)} + \varphi_-^{(+)}) - n (\varphi_+^{(+)} + \varphi_-^{(+)}) \\ &\quad - \underbrace{n \varphi_-^{(+)} + i \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_-^{(+)}}{\partial z} - \frac{i}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_-^{(+)}}_{\approx 0 \text{ par (A.22)}} \end{aligned}$$

Souvenons-nous que $\varphi_+^{(+)} + \varphi_-^{(+)} \stackrel{(A.3)}{=} \sqrt{n} \phi^{(+)} \stackrel{(2.17)}{=} \chi^{(+)}$. Alors

(A.5+), avec notre critère de collimation, est bien l'équation "collimatée" (2.20) pour le même champ $\chi^{(+)}$. Est-ce compatible avec l'équation (A.5-)? Cette dernière s'écrit, compte tenu de (2.20) :

$$i \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_-^{(+)}}{\partial z} = -i \frac{1}{2} \frac{\partial \chi^{(+)}}{\partial z} - n \chi^{(+)} + n \varphi_-^{(+)} + \frac{i}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_+^{(+)}$$

Tirons $\frac{\partial \varphi_-^{(+)}}{\partial z}$ de (A.22) :

$$\begin{aligned} i \frac{1}{2} \frac{\partial \chi^{(+)}}{\partial z} &\approx -i \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} n - \frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \varphi_-^{(+)} - n \chi^{(+)} + n \varphi_-^{(+)} + \frac{i}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \varphi_+^{(+)} \\ &= -n \chi^{(+)} + \frac{i}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \chi^{(+)} + 2n \varphi_-^{(+)} \end{aligned}$$

La factorisation $\chi^{(+)} = \sqrt{n} \psi^{(+)} e^{+\frac{i}{2}f}$ donne, elle :

$$i \frac{1}{2} \frac{\partial \chi^{(+)}}{\partial z} = -n \chi^{(+)} + \frac{i}{2n} \frac{\partial n}{\partial z} \chi^{(+)} + i \frac{1}{2} \sqrt{n} e^{\frac{i}{2}f} \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z}$$

et on constate que (A.18-) assure la compatibilité; l'équation (A.5-) est donc automatiquement satisfaite dans l'approximation (2.22b) si (A.5+) l'est.

La factorisation $\chi^{(+)} = \sqrt{n} \psi^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar} f}$ inverse les rôles des équations (A.5+) et (A.5-). Comme ci-dessus, on peut écrire notre critère de collimation ($\lambda \left| \frac{\partial^2 \psi^{(+)}}{\partial z^2} \right| \ll n \left| \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial z} \right|$) à l'aide, cette fois-ci, de (A.19+); l'équation (A.5-) devient dans ce cas-là:

$$i \lambda \frac{\partial \chi^{(-)}}{\partial z} \approx - \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar} \tilde{p}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \chi^{(-)} + n \chi^{(-)} \quad (\text{A.23})$$

qui n'est autre que le pendant de (2.20), avec collimation dans le sens opposé; comme plus haut, (A.5+) est automatiquement satisfaite.

On voit donc que dans le cadre de la collimation du chapitre 2, le système d'équations (A.5) ne découple pas: on ne peut pas assigner strictement les deux sens opposés de propagation aux deux champs $\varphi_+^{(\pm)}$ resp. $\varphi_-^{(\pm)}$; les deux sens en question sont plutôt liés aux équations elles-mêmes, (A.5+) resp. (A.5-) et aux champs $\varphi_{\pm}^{(+)}$ resp. $\varphi_{\pm}^{(-)}$ (ou $\phi^{(+)}$ resp. $\phi^{(-)}$).

Notons que le passage de l'un à l'autre est donné par la conjugaison complexe:

si $\chi^{(+)} = \sqrt{n} \psi^{(+)} e^{\frac{i}{\hbar} f}$ est solution collimatée de (A.5+)
alors $\chi^{(-)} = \chi^{(+)*} = \sqrt{n} \psi^{(+)*} e^{-\frac{i}{\hbar} f}$ est solution collimatée de (A.5-).

Pour les champs $\varphi_{\pm}^{(\pm)}$, le facteur i de (A.1) intervertit les signes dans (A.3):

$$\phi^{(+)} = \phi \quad \text{et} \quad \phi^{(-)} = \phi^* \quad \Rightarrow \quad \phi^{(+)} = -\phi^{(-)*}$$

ce qui donne la conjugaison:

$$\begin{aligned} (\)_c : \quad \phi &\longmapsto \phi_c = \sigma_1 \phi^* \\ \text{et} \quad (\phi^{(\pm)})_c &= \phi^{(\mp)} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

On vérifie aisément que $[(\)_c, H] = 0$; l'équation "de Schrödinger" (A.9) est donc invariante sous la conjugaison $(\)_c$.

Pour l'exemple d'une onde plane:

$$\Phi_z(\vec{b}, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + E(\vec{p}) \\ 1 - E(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\lambda} (\vec{p} \cdot \vec{b} + E(\vec{p}) z)} \quad , \quad E(\vec{p}) = \sqrt{1 - \vec{p}^2}$$

on a: $\left(\Phi_{\vec{p}} \right)_c (\vec{b}, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - E^*(\vec{p}) \\ 1 + E^*(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\lambda} (\vec{p} \cdot \vec{b} + E^*(\vec{p}) z)}$

$\left(\right)_c$ change le sens de propagation (dans $\mathbb{R}^d$).

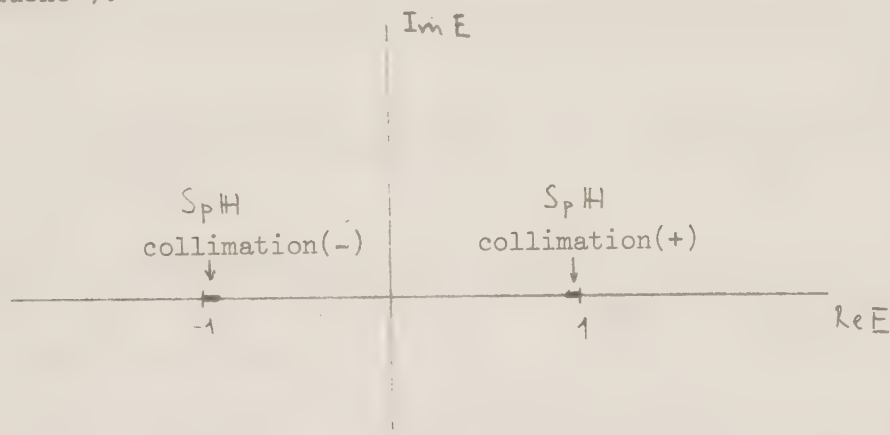
Les factorisations $\phi^{(+)}$ et $\phi^{(-)}$ (voir (A.18) et (A.19)) donnent, pour $\Phi_{\vec{p}}$:

$$\psi^{(\pm)}(\vec{b}, z) = e^{\frac{i}{\lambda} (\vec{p} \cdot \vec{b} + (E(\vec{p}) \mp 1) z)}$$

et la condition de collimation (2.22b) s'écrit:

$$|E(\vec{p}) \mp 1| \ll 1$$

Collimater revient donc à restreindre le spectre à des valeurs proches de 1 pour la collimation (+) (factorisation initiale (2.22a) ou "de gauche à droite") et de -1 pour la collimation (-) (factorisation (A.19) ou "de droite à gauche").



La conjugaison change le signe de E (collimation($\pm$) $\rightarrow$ collimation($\mp$)):

BIBLIOGRAPHIE

- (AH 79) J.-P. Amiet and P. Huguenin, Currents and local currents in Galilean quantum mechanics, *Helv. Phys. Acta* 52, 1979, 621-631.
- (AH 80) J.-P. Amiet and P. Huguenin, Generating functions of canonical maps, *Helv. Phys. Acta* 53, 1980, 377-397.
- (AH 82) J.-P. Amiet and P. Huguenin, Quantum mechanical representations of canonical transformations given by a generating function, *Helv. Phys. Acta* 55, 1982, 278-294.
- (AS 70) M. Abramowitz and I.A. Stegun ed., *Handbook of mathematical functions*, Dover, New-York, 9th ed. 1970.
- (BE 80) M.V. Berry, *Aspects of semiclassical mechanics*, Troisième cycle de la physique en Suisse romande, Lausanne, 1980.
- (BM 72) M.V. Berry and K.E. Mount, Semiclassical approximations in wave mechanics, *Rep. Prog. Phys.* 35, 1972, 313-397.
- (BW 59) M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*, Pergamon Press, London, 1959.
- (CR 80) B.J.B. Crowley, A semiclassical theory of elastic scattering and direct reactions: time-independent formulation in three spatial dimensions with complex trajectories, *Phys. Rep.* 57, 1980, 47-149.
- (CT 73) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Dunod, Paris, 1973.

- (FV 58) H. Feshbach and F. Villars, Elementary relativistic wave mechanics of spin 0 and spin $\frac{1}{2}$ particles, Rev. Mod. Phys. 30, 1958, 24-45.
- (GD 68) J.W. Goodman, Introduction to Fourier optics, McGraw Hill, New-York, 1968.
- (GL 59) R.J. Glauber, in Lectures in Theoretical Physics, ed. W. Brittin et al., New-York: Interscience, 1959, 1-315.
- (GO 71) K. Gottfried, Fresnel diffraction in Deuterium, Ann. Phys. 66, 1971, 868-883.
- (GR 62) A.M. Green, Velocity dependent nuclear forces and their effect in nuclear matter, Nucl. Phys. 33, 1962, 218-235.
- (GR 80) I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table integrals, series, and products, Acad. Press, New-York, 1980.
- (HA 80) J. Harthong, La méthode de la phase stationnaire, Séries de math. pures et appliquées, I.R.M.A., Strasbourg, 1980.
- (HT 76) E. Hecht, A. Zajac, Optics, Addison-Wesley, Reading, Mass. 3rd ed., 1976.
- (JA 68) J.M. Jauch, Foundations of quantum mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
- (KL 66) H. Kogelnik and T. Li, Laser beams and resonators, Proc. I.E.E.E., vol. 54, Oct. 1966, 1312-29.
- (KS 80) S.G. Krivoslykov, I.N. Sissakian, Optical beam and pulse propagation in inhomogeneous media. Application to multi-mode parabolic-index waveguides, Opt. Quant, Elect. 12, 1980, 463-475.

- (MF 81) V.P. Maslov and M.V. Fedoriuk, Semi-classical approximation in quantum mechanics, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, Holland, 1981.
- (MO 48) P.M. Morse, Vibration and sound, McGraw-Hill book Comp., 2nd ed., New-York, 1948.
- (MR 78) Ph. Martin, F. Rothen, Introduction aux champs quantiques et aux problèmes à N-corps, Troisième cycle de la physique en Suisse romande, Lausanne, 1978.
- (NE 66) R.G. Newton, Scattering theory of waves and particles, McGraw-Hill book Comp., New-York, 1966.
- (PI 76) C. Piron, Foundations of quantum physics, W.A. Benjamin Inc. London, 1976.
- (PS 78) T. Poston, I. Stewart, Catastrophe theory and its applications, Pitman, London, 1978.
- (SC 79) L. Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris, 2^{ème} ed. 1979.
- (VI 69) N.Ja. Vilenkin, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris, 1969.
- (WI 73) C. Wilkin, Diffusion pion-noyau, Troisième cycle de la physique en Suisse romande, Lausanne, 1973.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude au Professeur P. Huguenin, qui a inspiré et dirigé ce travail. Ses compétences et sa sérénité ont été des appuis précieux. J'apprécie d'autre part la très grande liberté qu'il m'a laissée: elle m'aura permis de m'intéresser à d'autres domaines de la physique ou des mathématiques.

Mes remerciements vont également au Professeur J.-P. Amiet, dont l'acuité et le mordant sont toujours bienvenus. Sa lecture critique du manuscrit m'aura permis d'éviter quelques erreurs!

Ma compréhension de mon propre travail a été enrichie par les points de vue nouveaux et stimulants des Prof. Dändliker et Rothen; je leur sais gré d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je souhaite aussi remercier François Reuse: ses connaissances en physique et en mathématiques sont une véritable mine, que j'aurai exploitée au cours de nos discussions amicales.

J'adresse une pensée émue à mon collègue et ami François Guillod. Notre vie quotidienne entre deux bureaux nous aura fait partager des moments de perplexité intense.

Enfin, je remercie tous mes collègues et amis de l'Institut de Physique, le personnel technique et administratif, pour leur présence toujours souriante, pour l'ambiance chaleureuse dans laquelle ce travail a été accompli.

CURRICULUM VITAE

Né le 8 septembre 1954 à Granges (SO), j'ai suivi les écoles primaire aux Ponts-de-Martel et à La Chaux-du-Milieu de 1961 à 1966, et secondaire au Locle, section classique, de 1966 à 1970. Elève au Gymnase Cantonal de La Chaux-de-Fonds dès 1970, j'y ai obtenu la maturité type C en 1973, année de mon entrée à l'Université de Neuchâtel où m'a été décerné le diplôme de physicien en 1978. Depuis juin 1978, j'y suis employé en qualité d'assistant dans le groupe de physique théorique du Professeur Huguenin.

